UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

FACHHOCHSCHULE
GIESSEN
FRIEDBERG

Friedberger Hochschulschriften

Wilfried Hausmann

Entwurf eines Optionspreismodells mit stochastischer Volatilität und tendenziell stabiler IVF-Struktur

Friedberger Hochschulschriften Nr. 28

Friedberger Hochschulschriften
Herausgeber:
Die Dekane der Fachbereiche des Bereichs Friedberg der FH Gießen-Friedberg
Wilhelm-Leuschner-Straße 13, D-61169 Friedberg
http://www.fh-giessen-friedberg.de

Friedberg 2007
ISSN 1439-1112

Zusammenfassung

(Abstract) In this paper we introduce an option pricing model with stochastic volatility which can be made to exactly match a given arbitrage free implied volatility surface (IVF). The dynamics of the IVF implied by the model - which we call a *near stable IVF structure* - is in good accordance with reality. Moreover, the system can be adapted to other dynamics. The model is easy to implement and easy to use (at least in theory, as it has not been implemented yet). It is designed as a two-factor markovian tree model. By a special construction method one can endow the tree with comparatively many knots near the beginning, but still keep the growth of the number of knots under control. Also due to the construction method problems like negative probabilities, which are typical for some option pricing tree models, do not occur .

Schlagwörter (Keywords) Option Pricing Models, Stochastic Volatility, Implied Volatility Function, Arbitrage Free Pricing Models, Markovian Tree Models, Market Price of Volatility Risk

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Einordnung des vorgestellten Modells in die Entwicklung von Black-Scholes zur stochastischen IVF

Mit der Entwicklung der modernen Optionspreistheorie durch Black, Scholes und Merton und insbesondere der Entdeckung der Black-Scholes-Formel [5] [21] zu Beginn der 70er Jahre des vergangenen Jahrhunderts erlebte der Optionshandel an den internationalen Börsen einen fulminanten Aufschwung. Das ist verständlich, denn mit dem *Black-Scholes-Merton*-Modell war erstmals ein Preismodell vorhanden, das nicht nur rational begründete Preise liefert, sondern gleichzeitig auch ein Rezept an die Hand gibt, wie sich der Emittend einer Option durch eine geschickte Handelsstrategie in dem darunter liegenden Basisinstrument (z.B. eine Aktie) gegen das Risiko absichern kann, das er mit diesem Geschäft eingeht. Zudem liefert die Black-Scholes-Formel mit der sogenannten *impliziten Volatilität* eine griffige Kennzahl, die es einem Händler sofort ermöglicht, eine Option als teuer oder preiswert einzustufen.

Doch das Black-Scholes-Modell ist nicht voraussetzungsfrei. Es basiert auf der Annahme, dass zukünftige Aktienkurse lognormalverteilt sind (zumindest unter dem sogenannten *äquivalenten Martingalmaß*). Dies wird durch empirische Untersuchungen nur bedingt bestätigt, was aber nicht so schlimm wäre, würden die Kurse der täglich millionenfach an Terminbörsen gehandelten

Call- und Put-Optionen (die einfachsten Optionen, die etwas despektierlich auch *Plain-Vanilla*-Optionen genannt werden) nicht belegen, dass Händler zwar mit der Black-Scholes-Formel rechnen, aber nicht gemäß des Black-Scholes-Merton-Modells handeln. Täten Sie das, so müssten alle Optionen zu einer Aktie die gleiche implizite Volatilität haben, was aber klar erkennbar nicht der Fall ist. Tatsächlich zeigen sich Phänomene, die mit Stichworten wie *Smile* oder *Skew* umschrieben werden und die für einen bestimmten Verlauf der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von Basispreis (Strike) und Fälligkeit der Optionen zu einer Aktie stehen. Das wird spätestens dann problematisch, wenn es um die Bewertung komplexerer Optionen, sogenannter *exotischer Optionen* geht.

Schon früh hat daher die Suche nach Modellerweiterungen und -alternativen begonnen. Zunächst einmal sind da sogenannte *Local-Volatility*-Modelle zu nennen, das sind Modelle, die im Rahmen der stochastischen Einfaktor-Markovmodelle bleiben, aber in der Lage sind, gewisse Smiles und Skews darzustellen. Hierzu gehört z.B. das *CEV*-Modell (CEV= Constant Elasticity of Variance; [8] [4]). Kommt man mit einem Einfaktormodell aus, so hat das den Vorteil, dass das zugehörige mathematische Modell vollständig ist, d.h. das Risiko aller Optionen durch eine geeignete Handelsstrategie in Basisinstrument und *Cashbond* (risikolose kurzfristige festverzinsliche Geldanalage) aufgefangen werden kann. Eine besondere Rolle spielt das *IVF*-Modell, wobei IVF für *Implied-Volatility-Function* steht, was die deutsche Übersetzung *Implizite-Volatilität*-Funktion erlaubt, aber auch *Implizite-Volatilität*-Fläche ist zutreffend, da es sich um eine Funktion in zwei Variablen (Strike, Restlaufzeit) handelt, deren Graph natürlich eine Fläche ist. Dieses von Dupire und anderen ([12] [9] [22]) entwickelte Modell ist in der Lage, jedes arbitragefreie System von Call- und Put-Optionspreisen zu einer Aktie nachzubilden (unter gewissen Regularitäts-, insbesondere Differenzierbarkeitsanforderungen an die IVF, [12] [2]). Es ist nachweislich das einzige Einfaktor-Markovmodell, das dazu in der Lage ist und es hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass es alle pfadunabhängigen Optionen ohne spezielle Verteilungsvoraussetzungen in dem Augenblick, in dem es aufgestellt wird, korrekt, d.h. marktgerecht bewertet. Mit dieser Herkulesleistung ist die Kraft des Modells aber auch aufgebraucht. Die zeitliche Dynamik der impliziten Volatilität, die das Modell unterstellt, weicht gravierend von der empirisch beobachtbaren ab [13]. Als Folge davon kann man sich auf die von dem Modell errechneten Preise pfadabhängiger Optionen nicht verlassen und ein Hedge solcher Optionen, der auf dem Modell basiert, enthält erhebliche Risiken [17]. Dennoch ist das Modell weitverbreitet und wird gerade zur Bewertung von exotischen Optionen eingesetzt. Es gilt - nicht zu Unrecht - als das beste, was im Einfaktorbereich möglich ist.

Ebenfalls schon früh wurden aber auch Zweifaktormodelle entwickelt. Das sind Modelle, in denen zwei (unter Umständen korrelierte) Wienerprozesse zur Verfügung gestellt werden, um die zufällige Entwicklung von Aktienkurs und Volatilität des Aktienkurses (diese „echte" Volatilität nennen wir zur Unterscheidung von der impliziten Volatilität auch *Spot-Volatilität*) zu modellieren. In diesen Modellen ist die (Spot-)Volatilität also stochastisch, wohingegen sie in den Einfaktormodellen zwar auch variieren kann, aber bereits im Vorhinein in Abhängigkeit von Zeitpunkt und Aktienkurs des Zeitpunkts (welcher natürlich stochastisch ist) eindeutig bestimmt ist. Diese Modelle liefern Optionspreise mit plausibler zeitlicher Dynamik, garantieren aber nicht mehr die mögliche Absicherung einer Option allein mit Underlying und Cashbond (unvollständiger Markt). Das ist aber in der Praxis kein gravierender Mangel. Denn über die Terminbörsen besteht mittlerweile ein liquider Markt für Plain-Vanilla-Optionen. Nimmt man diese in die Liste der verfügbaren *Hedge*-Instrumente auf, so ist auch hier die Risikoabsicherung möglich. Populäre Beispiele von Modellen mit stochastischer Volatilität stammen von (in chronologischer Reihenfolge) Hull und White [18], Stein und Stein [24], Heston [15] und Hagan, Kumar, Lesniewski und Woodward (das *SABR*-Modell [13]). Diese Modelle können auf viele am Markt beobachteten Formen von Smiles und Skews eingestellt werden. Sie können über analytische Formeln oder für europäische Calls und Puts (oder Ersatzkonstruktionen dafür) gut und schnell an die Marktpreise angepasst, d.h. kalibriert werden. Alle arbitragefreien Volatilitätsflächen können sie aber nicht identisch nachbilden, d.h. sie stimmen in der Regel nicht völlig mit dem Markt überein, sind unter diesem Aspekt also schlechter als das IVF-Modell.

In dieser Situation lag der nächste Entwicklungsschritt nahe: stochastische IVF-Modelle, d.h. Modelle, die ausgehend von der aktuellen Volatilitätsfläche deren stochastische Entwicklung modellieren. Solche Modellansätze und Modelle wurden u.a. von Derman und Kani [10], Schönbucher [23], Ledoit und Santa-Clara [20] sowie Brace et.al. [6] [7] entwickelt und untersucht. Hier sind deutliche Parallelen zur Entwicklung der Modelle zur Bewertung von Zinsderivaten gegeben, wo einerseits Einfaktormodelle, die die Stochastik des kurzfristigen Zinssatzes modellieren, entwickelt wurden, andererseits aber das *Heath-Jarrow-Morton*-Modell den Rahmen der Modellierung der stochastischen Entwicklung der gesamten Forwardzinskurve manifestiert. Und ebenfalls wie im Zinsbereich sind die stochastischen IVF-Modelle zwar theoretisch leistungsfähiger, aber auch zunehmend komplizierter und schwerer zugänglich und folglich nicht so leicht in der Praxis umsetzbar wie die vorgenannten einfacheren Ansätze.

Es gibt weitere Modelle, z.B. Sprung-Diffusions-Modelle, aber die genannten Modelle sind die mir bekannten, die eine mehr oder weniger enge Beziehung zu dem hier vorgestellten Modell haben.

Dieses Modell ist ein Zweifaktormodell, das Aktienkurs und Volatilität über zwei unabhängige Wienerprozesse steuert (korrelierte Prozesse wären möglich, erscheinen nach der momentanen Einschätzung aber weder notwendig noch vorteilhaft). Es ist vom Grundsatz her in der Lage, eine beliebige vorgegebene endliche Menge von arbitragefreien Call-/Put-Marktpreisen nachzubilden, wobei es aber - genau wie beim IVF-Modell - vermutlich nicht unbedingt klug ist, darauf in der Praxis allzu kleinlich zu bestehen. Schließlich ist es auch ein Modell, das die Dynamik der IVF als stochastischen Prozess mit plausiblen Eigenschaften modelliert, für die die Bezeichnung *tendenziell stabile Struktur* gewählt wurde.

Es ist ein sehr einfaches Modell, einfacher als viele der Vorbild- und Vorgängermodelle, das seine Einfachheit und gleichzeitige Flexibilität dadurch erreicht, dass die gesamten Unregelmäßigkeiten und Verwindungen des realen Markts in der Modellierung des Marktpreises des Volatilitätsrisikos berücksichtigt werden. Durch den Wechsel vom stetigen in ein diskretes stochastisches Modell kann der volle Spielraum zur Modellierung dieses Marktpreises - oder anders gesagt zur Modellierung des preisbestimmenden äquivalenten Martingalmaßes - genutzt werden. Ein gewisser Nachteil ist, dass man das Modell zumindest momentan nur als Baummodell nutzen kann, d.h. eine Optionsbewertung über ein Finite-Differenzenverfahren ist derzeit nicht möglich. Allgemeine analytische Preisformeln für Plain Vanillas sind folgerichtig auch nicht verfügbar, aber das ist verschmerzbar, denn die Marktpreise dieser Optionen fließen direkt in das Modell ein (es ist allerdings im Auge zu behalten, wie gut diese sich im endgültigen Modell wiederfinden, denn ganz so selbstverständlich wie im IVF-Modell ist die Übereinstimmung mit den Marktpreisen nicht). Nach einer Grundeichung, die unter anderem daraus besteht, zu erkennen und festzulegen, welche Marktpreise man dem System als Input übergeben sollte, ist nur noch ein weiterer Parameter (*die Volatilität der Volatilität*) zu pflegen, der theoretisch aber auch noch über einen einfachen maschinellen Optimierungsprozess festgelegt werden könnte.

Noch ein abschließender Punkt: Bei den Stichwörtern „Baummodell" und „IVF" könnte man befürchten, dass die Berechnungen aufgrund numerischer Effekte nicht selten zu Zahlen führen, die negativ sind, obwohl sie theoretisch nur positiv sein können. Das ist nicht der Fall, da es vermieden wird, heikle Gleichungen aufzustellen und zu lösen. Stattdessen werden Optimierungsaufgaben gelöst. So kommt der Algorithmus des Modellaufbaus auch mit Eingangsdaten zurecht, die Arbitragemöglichkeiten enthalten. Dann werden die Ausgangspreise allerdings u.U. deutlich von den vorgegebenen Marktpreisen abweichen, was in der Situation aber niemand als Nachteil ansehen sollte.

In einem eigenen Kapitel wird auf die Praxistauglichkeit des Modells aus

Händlersicht eingegangen. Auch diesbezüglich sollte es deutliche Pluspunkte verbuchen können (was sich aber noch zeigen muss!), denn es besteht die Erwartung, dass es sehr gut auf die übliche Praxis hin eingerichtet werden kann, die verwendeten Modelle in kurzen Zeitabständen an die aktuellen Marktdaten anzupassen - also eigentlich einen Systemwechsel zu vollziehen.

2 Das Modell

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Basiswert S (den wir auch als Aktie ansprechen, obwohl natürlich auch andere Wertpapiere denkbar sind) im Betrachtungszeitraum keine Dividenden ausschüttet. Da ein Baummodell konstruiert wird, stellt die Erweiterung auf stetige oder absolute Dividenden aber kein Problem dar.

Es werden ferner variable, aber nicht stochastische Zinsen vorgesehen, $B(t)$ bezeichnet den Wert des Cashbonds zum Zeitpunkt t, $B(t)/B(t+\Delta t)$ ist also der Diskontierungsfaktor für den den Zeitraum $[t, t+\Delta t]$ Eine Erweiterung auf stochastische Zinsen ist vom Grundsatz her auch möglich, würde dem Baum aber eine weitere Dimension hinzufügen, was zu Rechnerlaufzeitproblemen führen könnte.

Unser Modell ist ein einfaches Zweifaktormodell mit stochastischer Volatilität. Es geht davon aus, dass sich in der realen Welt Aktienkurs S und (Spot-)Volatilität σ gemäß der folgenden stochastischen Differentialgleichungen entwickeln:

$$d\sigma = \beta\, dt + \alpha\sigma\, dW_1$$
$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW_2$$

Hierbei sind W_1 und W_2 unabhängige Wienerprozesse, β und μ sind ebenfalls stochastische Prozesse (dürfen natürlich auch einfach Zahlen sein) und α ist eine Zahl - der einzige Parameter des Modells (häufig als *volvol*, die Volatilität der Volatilität bezeichnet). Nach der allgemeinen Optionspreistheorie und der Theorie stochastischer Prozesse (s. z.B. [16] [14] [3] oder [19]) gibt es dann ein zum Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ der realen Welt äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}^*$ mit ebenfalls unabhängigen Wienerprozessen W_1^* und W_2^*, so dass sich S und σ bezüglich $\mathbf{Q}^*$ gemäß

$$\begin{aligned} d\sigma &= \gamma\, dt + \alpha\sigma\, dW_1^* \\ dS &= S\frac{dB}{B} + \sigma S\, dW_2^* \end{aligned} \tag{1}$$

entwickeln, wobei B der oben eingeführte *Cashbond* ist und der stochastische Prozess γ durch den *Marktpreis des Risikos in Volatilität(sänderungen)* bestimmt ist. In diesem Modell sind dann die Preise aller Derivate (von S und σ) als diskontierte Erwartungswerte bestimmt. $\mathbf{Q}^*$ heißt das *preisbestimmende äquivalente Martingalmaß*. Das ist unser Ansatz - im Grunde nichts Neues. Wir versuchen nun aber nicht, γ zu eliminieren oder in eine möglichst einfache Gestalt zu bringen, sondern akzeptieren γ als komplexen, möglicherweise theoretisch nur schwer beschreibbaren stochastischen Prozess, auf dessen Gestalt die Marktpreise der Plain-Vanilla-Optionen und ihre Dynamik aber weitgehende Hinweise geben. Wir nehmen auch in Kauf, dass bei Einsatz des Modells in der Praxis eventuell herauskommt, dass der Markt das Risiko in der Volatilität einer Aktie A möglicherweise anders bewertet als das in einer Aktie B.

An dieser Stelle verlassen wir die Welt der stetigen stochastischen Prozesse und beschäftigen uns ab jetzt nur noch mit diskreten und in endlichen Zeiträumen sogar endlichen Modellen (*Baummodelle*). Im Kosmos dieser Modelle gelten die Prinzipien des No-Arbitrage-Ansatzes und der Martingaltheorie genauso wie in den stetigen Modellen, sind aber deutlich einfacher zu beweisen (siehe z.B. Kapitel 5 in [14]).

In einem solchen Modell gibt es endlich viele mögliche Zustände der Welt, was im Zusammenhang mit unserer Fragestellung bedeutet, dass es endlich viele Kombinationen (S, σ) von Aktienkursen S und Volatilitäten σ gibt, die im Vorhinein in Betracht gezogen werden. Außerdem gibt es in einem solchen Modell in einem endlichen Zeithorizont endlich viele Zeitpunkte t_i ($t_0 < t_1 < ... < t_n$), in denen der Zustand $X(i)$ der Welt festgestellt wird und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$, das die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X(i)$ bestimmt. Wir betrachten ferner nur Markov-Ketten, d.h. wir nehmen an, dass die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand (S_1, σ_1) im Zeitpunkt t_i in den Zustand (S_2, σ_2) im Zeitpunkt t_{i+1} unabhängig davon ist, wie der Zustand (S_1, σ_1) erreicht wurde. Wir nennen einen solchen Übergang *möglich*, wenn er eine positive Wahrscheinlichkeit hat.

In dieser Situation ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Ausgangszeitpunkt t_0 und die Gesamtheit der Übergangswahrscheinlichkeiten eindeutig bestimmt. Von großer Bedeutung in der Theorie der arbitragefreien Derivatebewertung ist der schon oben benutzte Begriff des äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes. Hierbei heißen zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem gleichen Maßraum Ω äquivalent, wenn sie die gleichen Nullmengen haben. Für die beschriebenen endlichen Markov-Ketten oder Baummodelle bedeutet das:

Satz 1 *Durch Festlegung der im Zeitpunkt t_0 möglichen Zustände (in der Regel nur ein einziger) und der möglichen Übergänge insgesamt ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ eines Baummodells der beschriebenen Art bis auf die*

Äquivalenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen eindeutig bestimmt.

Die genauen Werte der Übergangswahrscheinlichkeiten zu möglichen Folgeknoten können also beliebig festgelegt werden (mit der offensichtlichen Nebenbedingung, dass sie größer als null sein müssen und sichere Ereignisse die Wahrscheinlichkeit 1 haben) ohne dass man die Äquivalenzklasse des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$ verlässt.

Der erste Schritt unseres Verfahrens besteht in der Festlegung der Äquivalenzklasse des Wahrscheinlichkeitsmaßes der Entwicklung von Aktienkurs und Volatilität. Dies wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Zunächst werden in einem naheliegenden rechteckigen Schema alle überhaupt denkbaren Kombinationen (S, σ) festgelegt. Im Anschluss daran werden die möglichen Übergänge abhängig von S und σ bestimmt. Dies geschieht nach dem aus den bekannten Baummodellen üblichen Muster: Die Größe von σ bestimmt die möglichen Folgewerte für S und der Parameter α die möglichen Folgewerte für σ. Um die Anzahl der Knoten zu begrenzen, müssen hierbei die errechneten Werte leicht angepasst werden (das im Vorhinein festgelegte endliche (S, σ)-Schema wird quasi als Steckplatte benutzt).

Um Derivate bewerten zu können, muss dann aber noch das zu $\mathbf{P}$ äquivalente preisbestimmende Martingalmaß $\mathbf{Q}^*$ ermittelt werden. Hierzu ist der Handlungsspielraum groß: Die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Übergänge (die möglichen Übergänge sind ja jetzt bekannt) können beliebig festgelegt werden. Aber auch die Menge der verfügbaren Information ist groß: die Marktpreise der Plain-Vanilla- Optionen oder in anderen Worten: die Fläche der impliziten Volatilitäten. Das allein reicht aber (für große Bäume) noch nicht aus, um $\mathbf{Q}^*$ zu bestimmen (sonst könnte es nicht sein, dass ein Einfaktormodell wie das IVF-Modell die komplette Volatilitätsfläche korrekt abbilden kann) bzw. könnte dazu führen, dass das am Ende herauskommende Modell sich sehr in der Nähe des IVF-Modells befindet.

Was noch fehlt, ist eine Vorstellung, wie sich die Implizite-Volatilität-Fläche im Laufe der Zeit und abhängig von der Spot-Volatilität entwickeln soll. Hier gehen wir von der folgenden Annahme aus:

Annahme 2 *1.) Bei gleichbleibender Volatilität bleibt die IVF in Abhängigkeit von Restlaufzeit und Moneyness (=Spotpreis/Strike) näherungsweise konstant.*
2.) Eine Veränderung der Spot-Volatilität bewirkt eine Parallelverschiebung der Implizite-Volatilität-Fläche um eben diese Veränderung.

Beide Aussagen passen zu [20]. Dort wird die Modellierung der Entwicklung der IVF im Modellansatz in Abhängigkeit von Restlaufzeit und Moneyness damit begründet, dass sich die Veränderungen aus Sicht dieser Variablen in realen Märkten vergleichsweise langsam vollziehen. Ferner zeigen die Autoren, dass in dem dortigen Modellrahmen, der unseren Ansatz beeinhaltet, die implizite Volatilität im Grenzwert „Restlaufzeit $\rightarrow 0$" und „Strike = Spot" gegen die aktuelle Volatilität des Underlyings konvergiert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *At-The-Money-Volatilität* (*ATM-Volatilität*).

Die beiden Annahmen werden allerdings nicht im absoluten Sinne konsequent umgesetzt, sie werden lediglich in den zu lösenden quadratischen Optimierungsaufgaben zur Formulierung der Zielfunktion eingesetzt. Daher reden wir auch nur von *tendenziell stabiler Struktur der IVF*. Nur wenn die Zielfunktion in jedem Teilproblem den idealen Wert null erreicht, hat die IVF eine *exakt* stabile Struktur. Wir machen an dieser Stelle auch keine Aussage darüber, ob jede IVF eine arbitragefreie exakt stabile Struktur ihrer Dynamik zulässt.

Wie die risikoneutralen Übergangswahrscheinlichkeiten ermittelt werden, wird im übernächsten Kapitel beschrieben. Dort werden zwei Methoden, eine sogenannte lokale und eine globale angegeben. Tendenziell wirkt die lokale stärker auf die Einhaltung der beiden oben formulierten Maximen hin, wohingegen die globale so eingesetzt werden kann, dass vor allem die vorgegebenen Optionsmarktpreise exakt nachgebildet werden. Beide Methoden können gemischt werden, so dass hier noch ein modellbilderischer Spielraum verbleibt.

Bemerkung 3 *Annahme 2 ist zwar plausibel und wird vor allem im kurzfristigen Bereich durch die Marktdaten gestützt, auf Gedeih und Verderb ist die in diesem Artikel entworfene Vorgehensweise damit aber nicht verknüpft. Vielmehr ist die Methode - wie man leicht sieht - in der Lage, im Grunde jede Vorstellung über die Entwicklung der IVF „tendenziell" umzusetzen, die sich als Funktion in Abhängigkeit von Volatilität und Zeit beschreiben lässt. Es spielt hierbei auch keine Rolle, ob eine solche Entwicklung in der Theorie überhaupt arbitragefrei möglich ist, die Methode liefert im Endergebnis ein arbitragefreies System, das diese Entwicklung so gut es geht - eben tendenziell - umsetzt.*

3 Aufbau des Bewertungsbaums

Die beschriebene Konstruktionsmethode hat das Ziel, frühzeitig eine hohe Anzahl an Knoten zu generieren, später dann aber das Wachstum zu begrenzen. Es ist zu hoffen, dass dadurch die Eigenschaften des Modells verbessert werden. Grundsätzlich geeignet sind auch andere Baummodelle, die in der Lage sind, die stochastische Differentialgleichung (1) näherungsweise umzusetzen und deren Größe im numerisch handhabbaren Rahmen bleibt.

Begonnen wird mit der Festlegung, welche Kombinationen (S, σ) von Aktienkurs S und Spot-Volatilität σ zu einem Zeitpunkt t_i überhaupt vorkommen können sollen. Es bietet sich an, zunächst ein rechteckiges Schema einzurichten, in dem alle Kombinationen von

$$S_{\min} = S_0 < S_1 < ... < S_m = S_{\max}$$

mit

$$\sigma_{\min} = \sigma_0 < \sigma_1 < ... < \sigma_l = \sigma_{\max}$$

vorgesehen sind, wobei der jeweils mittlere Wert dem Ausgangsspotpreis (Alternative: t_i-Forwardpreis) bzw. der Ausgangs-ATM-Volatilität gleicht. Die Abstände zwischen den S_i werden hierbei zunächst konstant gewählt, und zwar so, dass von den kleinsten realistisch in Betracht zu ziehende S-Werten in Kombination mit der kleinsten Volatilität ein adäquater Übergang möglich ist. Bei den vorgesehenen Volatilitäten sind proportionale Abstände zweckmäßig, die dem gewählten Parameter α entsprechen. Dann wird das Gitter ausgedünnt, und zwar so, dass der Abstand von einem Punkt (S, σ) zu den nächstgelegenen Punkten mit gleichem σ-Wert in etwa gleichbleibend proportional zu $S \cdot \sigma$ ist.

In der Regel wird man dieses Gitter für jeden der betrachteten Zeitpunkte t_i $(0 = t_0 < ... < t_n)$ gleich wählen, vom Grundsatz her kann es aber für jedes t_i individuell gestaltet werden.

Benutzt, d.h. in den Baum übernommen wird dann nicht das gesamte Gitter, sondern nur die Punkte, die durch Übergänge von Knoten des Zeitpunkts t_{i-1} angesprochen werden, wobei natürlich das Root-Element des Baumes durch den aktuellen Aktienkurs und die aktuelle ATM-Volatilität charakterisiert ist. Die möglichen Übergänge werden wie folgt festgelegt: Es ist zunächst zu entscheiden, wie viele Folgeknoten von einem Knoten aus erreichbar sein sollen. Da wir - auch um die Parameterzahl des Modells möglichst gering zu halten - die Entwicklung von Aktienkurs und Volatilität im Ansatz unkorreliert modellieren wollen (lokale Korrelationen kommen dann aber später automatisch durch die ermittelten Übergangswahrscheinlichkeiten ins Spiel), wird empfohlen, a mögliche Folgewerte für S und b mögliche Folgewerte für σ vorzusehen und dann die Übergänge zu allen möglichen $a \cdot b$ Kombinationen zu ermöglichen. Die a Folgewerte für S sind zunächst unabhängig von den im Gitter vorgesehenen Werten der im Knotenpunkt vorhandenen Volatilität entsprechend zu berechnen. Bei $a = 2$ kann man also dem Cox-Ross-Rubinstein-Modell entsprechend die Werte $S \cdot e^{\pm\sigma\sqrt{\Delta t}}$ (oder auch $S \cdot \left(1 \pm \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ die Länge des jeweiligen Zeitschritts) wählen (s. [16] oder [14]). Bei $a = 3$ sind S und $S \cdot e^{\pm\sigma\sqrt{3\Delta t/2}}$ oder einfacher

S und $S \cdot \left(1 \pm \sigma\sqrt{3\Delta t/2}\right)$ geeignete Werte. Arbeitet man mit Forwardpreisen - was bei größen Zeitschritten Δt zu empfehlen ist - so sind die Werte entsprechend anzupassen. Orientierungsgröße ist dabei die Varianz der endlichen Zufallsvariablen, die durch die Zusatzbedingungen 1) „Erwartungswert gemäß des aktuellen Zinssatzes" und 2.) „möglichst gleich große Übergangswahrscheinlichkeiten" bestimmbar wird.

Bezüglich der zweiten Komponente, der Volatilität verfährt man ganz entsprechend.

Im Anschluss daran müssen diese Werte aber dem vorgesehenen Gitter angepasst werden, d.h. es ist jeweils der dem errechneten Wert nächstgelegene Punkt im Gitter zu suchen. Die hierdurch entstehende Ungenauigkeit sollte insgesamt nicht ins Gewicht fallen, da die Abweichungen in beiden Richtungen in etwa gleich häufig vorkommen sollten. Diese Anpassung ist wichtig, um die Anzahl der Knoten begrenzt zu halten und den Baum soweit es geht „recombining" zu machen, was ja aufgrund der Markoveigenschaft prinzipiell möglich ist. Gerade zu Beginn des Baumes, also bei kleinen t_i, sollte man auf diese Anpassungen möglicherweise aber auch verzichten, denn es ist im Sinne der Leistungsfähigkeit des Modells wünschenswert, am Anfang des Baumes bei nur wenigen Knoten und Übergängen diese Zahl möglichst rasch zu erhöhen, wohingegen es zu späteren Zeitpunkten eher so ist, dass Knoten und Kanten im Überfluss vorhanden sind, so dass ihre Zahl möglichst begrenzt werden muss, um das Modell berechenbar zu halten. Dazu wird es häufig erforderlich sein, noch weitergehende Maßnahmen zu ergreifen, um die Zahl der Übergänge zu begrenzen. Eine solche Maßnahme wird am Ende des Kapitels vorgeschlagen.

Gerät man bei diesen Berechnungen ganz aus dem vorgesehenen (S, σ)-Bereich heraus, so wählt man jeweils den nächstgelegenen Randpunkt dieses Bereiches. Dass sich dabei die Anzahl der möglichen Folgeknoten verkleinern kann (wenn dieser nächstgelegene Punkt schon vergeben ist), wird in Kauf genommen. Es ist allerdings darauf zu achten, dass sich hierdurch keine Arbitragemöglichkeit zwischen Aktie und Cashbond ergibt. Der Bereich der zulässigen S-Werte muss dann (und bei jedem weiteren Zeitschritt erneut) leicht erweitert werden. Bezüglich der Volatilität ist das Problem nicht vorhanden.

Wie viele mögliche Übergänge sollte man je Knoten vorsehen? Je größer die Anzahl ist, desto flexibler ist das Modell, umso größer aber auch der Rechenaufwand. Welche Anzahl angemessen ist, muss die Erfahrung zeigen. Aufgrund der Überlegung, dass Optionspreismodelle in der Praxis in vergleichsweise kurzen Zeitabständen an die Marktdaten angepasst, also neu berechnet werden, ist es - wie schon oben geschrieben - wünschenswert, gerade am Anfang des Baumes eine hohe Verzweigungszahl zu haben, wohingegen das im hinteren Bereich, in dem die Gesamtzahl der Knoten und damit auch zwangsläufig die der Übergänge je Zeitpunkt ohnehin schon groß ist, weniger notwendig sein dürfte. Denn jeder einzelne mögliche Übergang von einem Knoten des Zeitpunkts t_i zu einem Knoten des Folgezeitpunkts steht für eine Variable, die zur Gestaltung des Übergangs zur Verfügung steht.

Für die Wahl der Zeitpunkte t_i gelten analoge Überlegungen. Sie müssen keineswegs äquidistant liegen, man kann die Abstände z.B. am Anfang kleiner wählen. Allerdings können es die zu bewertenden Optionen (pfadabhängige Optionen wie z.B. Barrier-Optionen) nahelegen, auch in späteren Zeiträumen möglichst kleine Abstände der t_i einzurichten. Die bekannten Probleme von Baummodellen im Zusammenhang mit Barrier-Optionen dürften sich aber mit Hilfe von [1] weitgehend entschärfen lassen.

Es wird empfohlen, die Testreihen zu dem Verfahren mit 3*3-Verzweigungen an den sehr frühen Knoten zu beginnen, um dann später zu 2*2-Verzweigungen überzugehen, eventuell mit einer 3*2- oder 2*3-Zwischenphase. Die Zeitabstände sollten zunächst äquidistant gewählt werden, vielleicht aber auch (im hinteren Bereich) den Fälligkeitsterminen der börsengehandelten Optionen angepasst werden. Starten sollte man ferner mit einem Modell, bei dem die Gesamtzahl der möglichen Übergänge $t_i \to t_{i+1}$ immer überschaubar bleibt. Der dreistellige Bereich sollte keinesfalls überschritten werden.

Weitere begrenzende Maßnahmen. Droht die Anzahl der Übergänge zu groß zu werden, so dass die erforderliche Rechenzeit (oder auch der Speicherbedarf) nicht mehr vertretbar ist, so sind weitere Knoten begrenzende Maßnahmen erforderlich. Eine solche könnte wie folgt aussehen: Man sortiert alle Knoten (S, σ) des Zeitpunkts t_i mit einem festen σ-Wert aufsteigend nach S:

$$S_{1,i} < ... < S_{z,i}$$

Dann sortiert man die berechneten Werte des Zeitpunkts t_{i+1}, die ebenfalls diesen σ-Wert haben (oder den diesem nächstgelegenen), in diese Reihe ein

$$...S_{j,i} \leq S_{g,i+1} < S_{g+1,i+1} < ...S_{h,i+1} < S_{j+1,i}...$$

und fasst alle zwischen zwei aufeinander folgenden Knoten des Zeitpunkts t_i liegende Knoten des Zeitpunkts t_{i+1} zu einem zusammen, wobei der Wert über eine Durchschnittsbildung ermittelt wird, also z.B. gleich dem arithmetischen Durchschnitt ($(S_{g,i+1} + S_{g+1,i+1} + ...S_{h,i+1}) / (h + 1 - g)$) gewählt wird. Mittelt man entsprechend auch die $S_{1,i}$ unterschreitenden Werte und auch die $S_{z,i}$ überschreitenden, so hat der Zeitpunkt t_{i+1} maximal einen Knoten mehr mit diesem σ-Wert als der Zeitpunkt t_i. Auch in dieser Situation besteht eine kleine Gefahr, dass eine Arbitragemöglichkeit zwischen Aktie und Cashbond entsteht, die sich aber leicht beseitigen lässt.

4 Ermittlung der risikoneutralen Übergangswahrscheinlichkeiten

Zur Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung des Marktpreises des Volatilitätsrisikos wird Annahme 2 benötigt. Nach ihrem ersten Teil, der Annahme der in Restlaufzeit τ und Moneyness S/K konstanten impliziten Volatilität $f(S/K, \tau)$, können in jedem Zustand $s(i,j)$ eines jeden Zeitpunkts t_i sämtliche europäischen Calls und Puts nach der Black-Scholes-Formel bewertet werden, sofern die Volatilität σ des Zustands der Ausgangs-ATM-Volatilität (σ_0) gleicht. Ist $\sigma \neq \sigma_0$, so besagt der zweite Teil der Annahme, dass sich die gesamte Volatilitätsfläche um die Differenz verschoben hat. Auch hier kann also die für die Black-Scholes-Formel zu verwendende Volatilität $\widehat{\sigma}$ berechnet werden, wobei negative Werte natürlich zu vermeiden sind:

$$\widehat{\sigma} = \max(f(S/K, T - t_i) + \sigma - \sigma_0, \varepsilon)$$

(K der Strike, S der Spotpreis des Zustands, T das Fälligkeitsdatum der Option und $\varepsilon > 0$ eine vorher festzulegende minimale implizite Volatilität). Damit diese Preise für eine Option A konsistent sind, müssen die risikoneutralen Übergangswahrscheinlichkeiten $q(i,j,k)$ von $s(i,j)$ nach $s(i+1,k)$ bestimmte Bedingungen erfüllen. Bezeichnet man den Wert einer Option A im Zustand $s(i,j)$ des Zeitpunkts t_i mit $A(i,j)$, so muss gelten:

$$A(i,j) = \frac{B(t_i)}{B(t_{i+1})} \sum_k q(i,j,k) A(i+1,k)$$

(B der Cashbond) wobei die Summe über die Zustände zu nehmen ist, die als mögliche Folgezustände für $s(i,j)$ vorgesehen sind. Im Idealfall sind diese Gleichungen für alle Optionen simultan erfüllbar, d.h. die Gleichungen gelten für die mit den $\widehat{\sigma}$ berechneten Black-Scholes-Preise $\widehat{A(i,j)}$:

$$\widehat{A(i,j)} = \frac{B(t_i)}{B(t_{i+1})} \sum_k q(i,j,k) A\widehat{(i+1,}k) \tag{2}$$

Realistischer ist es, davon auszugehen, dass diese Gleichungen nur näherungsweise erfüllt werden können, zumindest wenn die Zahl der betrachteten Optionen die Anzahl der Folgezustände übersteigt. Es ist daher nicht sinnvoll, die Gleichungen der Art (2) für eine größere Menge $\mathcal{M} = \{A, C, .D...\}$ von Optionen simultan zu lösen zu versuchen und auf diese Weise die Übergangswahrscheinlichkeiten $q(i,j,k)$ zu bestimmen. Sinnvoller ist es, für jeden Zustand $s(i,j)$ stattdessen das ebenfalls mit leistungsfähigen Standardverfahren lösbare quadratische Optimierungsproblem

$$\sum_{A\in\mathcal{M}} \left[\widehat{A(i,j)} - \frac{B(t_i)}{B(t_{i+1})} \sum_k q(i,j,k) A\widehat{(i+1,k)} \right]^2 \to Min$$

in Angriff zu nehmen, wobei die zu (2) analoge Gleichung für das Underlying

$$S(i,j) = \frac{B(t_i)}{B(t_{i+1})} \sum_k q(i,j,k) S(i+1,k) \tag{3}$$

als Nebenbedingung genauso zu berücksichtigen ist wie die Bedingung

$$\sum_k q(i,j,k) = 1\,,$$

die zusammen mit der Nichtnegativitätsbedingung für die $q(i,j,k)$ garantiert, dass diese eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben.

Bemerkung 4 *Damit die 0 nicht als Übergangswahrscheinlichkeit vorkommt und somit die im vorigen Kapitel festgelegte Äquivalenzklasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen verlassen wird, ist es möglicherweise sinnvoll, die Nichtnegativitätsbedingung durch die Bedingung $q(i,j,k) \geq \delta$ mit einem kleinen positiven Wert δ zu ersetzen.*

Das soeben geschilderte Verfahren zur Festlegung der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem bestimmten Punkt aus nennen wir die *lokale Methode*. Sie ist für jeden Knoten $s(i,j)$ ohne weitere Vorbedingungen oder Berechnungen möglich, kann also in beliebiger Reihenfolge der Knoten durchgeführt werden. Von großem Einfluss ist natürlich die Auswahl der Optionsmenge $\mathcal{M}$, hierauf wird weiter unten noch eingegangen werden.

Eine zweiter Ansatz zur Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem preisbestimmenden äquivalenten Martingalmaß, die *globale Methode*, erfordert, dass die Wahrscheinlichkeiten in zeitlich aufsteigender Folge bestimmt werden. Sind nämlich alle Übergangswahrscheinlichkeiten bis zu dem Zeitpunkt t_i bekannt, so lassen sich daraus auf bekannte Art die absoluten Zustandswahrscheinlichkeiten $\mathbf{Q}^*(l,j)$ der Zustände $s(l,j)$ bis einschließlich $l=i$ bestimmen. Die als nächstes zu ermittelnden Zustandswahrscheinlichkeiten des Zeitpunkts t_{i+1} berechnen sich aus den Zustandswahrscheinlichkeiten des Zeitpunkts t_i zusammen mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{Q}^*(i+1,k) = \sum_j q(i,j,k) \mathbf{Q}^*(i,j) \tag{4}$$

wobei die Summe über alle Vorgängerknoten von $s(i+1,k)$ zu nehmen ist.

Ist nun A eine Option, so ist der Preis $A(0)$ von A im Zeitpunkt $t_0 = 0$ gleich dem diskonierten Erwartungswert unter $\mathbf{Q}^*$:

$$A(0) = \frac{1}{B(t_{i+1})} \sum_k \mathbf{Q}^*(i+1,k) A(i+1,k) \tag{5}$$

Analog zur lokalen Methode führt führt dann der Ansatz

$$\sum_{A \in \mathcal{M}} \left[A(0) - \frac{1}{B(t_{i+1})} \sum_k \mathbf{Q}^*(i+1,k) A(\widehat{i+1,k}) \right]^2 \to Min \tag{6}$$

nach Ersetzung von $\mathbf{Q}^*(i+1,k)$ durch den Ausdruck aus Gleichung 4 zu einem quadratischen Optimierungsproblem in den Übergangswahrscheinlichkeiten von t_i zu t_{i+1}. Jetzt ist für den Zeitpunkt t_i nur ein einziges Problem zu lösen, das allerdings viel mehr Variablen enthält (eine je vorgesehenem Übergang). Auch die Anzahl der Nebenbedingungen ist höher, denn es müssen die Nebenbedingungen der lokalen Methode für sämtliche Zustände des Zeitpunkts t_i eingehalten werden.

Auch für die globale Methode ist die Auswahl der Menge $\mathcal{M}$ entscheidend. Lässt man ihr den Spielraum, so wird sie nur um die Minimierung der Zielfunktion und wenig auf die Einhaltung der Annahme 2 achten. Im Extremfall ist ihr diese völlig gleichgültig. Dieser Extremfall ist gegeben, wenn man in die Menge $\mathcal{M}$ in (6) nur Optionen aufnimmt, deren Fälligkeit t_{i+1} ist. Denn deren Wert in t_{i+1} ist dann einfach der Payoff - völlig unabhängig von der dann gegebenen IVF. Diese Vorgehensweise ist nicht unbedingt die beabsichtigte Nutzung der Methode, man kann sie aber ausnutzen, um zu zeigen, dass das Modell mindestens so gut ist wie das IVF-Modell, das beste Einfaktormodell:

Satz 5 *$\mathcal{N}$ sei eine endliche Menge von Plain-Vanilla-Optionen zu dem Basiswert S, deren Preise in eine arbitragefreie IVF passen. Dann können die Preise dieser Optionen in einem Modell der beschriebenen Art beliebig genau nachgebildet werden. Das Modell ist also in der Lage, beliebige Smiles und Skews nachzubilden, sofern sie mit der Bedingung der Arbitragefreiheit verträglich sind.*

Beweis. Dies folgt daraus, dass das IVF-Modell diese Eigenschaft hat. Setzt man die Menge $\mathcal{N}$ und evtl weitere Optionen, die zu der IVF passen, nur in der vor dem Satz beschriebenen Weise ein, also jeweils nur für den letzten Zeitschritt vor ihrer Fälligkeit, und bestimmt man alle Übergangswahrscheinlichkeiten über die so genutzte globale Methode, so streben alle aufgestellten Optimierungsaufgaben (6) nur die genaue Abbildung der vorgegebenen

Marktpreise an, sonst nichts. Das IVF-Modell kann diese Preise alle darstellen, also kann das näherungsweise auch ein Baummodell zu dem zugehörigen Lokale-Volatilität-Modell. Enthält der im vorigen Kapitel konstruierte Baum genügend viele Knoten und genügend kleine Zeitschritte und ist die Volatilität der Volatilität genügend groß, so enthält dieser Baum zwangsläufig einen solchen Baum als Teilbaum, d.h. man muss nur eine Reihe Knoten und Übergänge entfernen, um zu dem Lokale-Volatilität-Modell zu kommen (in einem Lokale-Volatilität-Modell gibt es je Kombination Aktienkurs/Zeitpunkt genau eine Volatilität, in unserem Zweifaktormodell hingegen ist je Aktienkurs/Zeitpunkt jede Volatilität möglich (in der stetigen Version)). Was aber in dem viel kleineren Teilbaum möglich ist, sollte erst recht in dem größeren Baum möglich sein, denn es stehen viel mehr Variablen zur Verfügung. Zumindest gibt es die Lösung, die Werte dieser zusätzlichen Variablen auf 0 (oder einen sehr kleinen Wert) zu setzen und die Übergangswahrscheinlichkeiten des Teilbaums ansonsten (so gut wie) unverändert zu übernehmen. ■

Wie schon gesagt ist das natürlich nicht die angestrebte Nutzung des Modells, aber man kann das als Ausgangspunkt nehmen und über zusätzliche Bedingungen, d.h. Erweiterung der Mengen $\mathcal{M}$ das Modell in Richtung Stabilität der IVF prägen, also quasi nach dem Motto „Wie viel strukurelle Stabilität verträgt die IVF?" verfahren. Dies soll natürlich nicht laufend bei den periodischen Anpassungen an die aktuellen Marktdaten, sondern im wesentlichen einmal, im Rahmen von Testläufen bei der Implementierung geschehen.

Hat man den Baum erst einmal in seinem Gerüst konstruiert, d.h. die Aufgaben des vorigen Kapitels erledigt, so entscheiden im wesentlichen die Antworten auf die folgenden Fragen über die genaue endgültige Gestalt des Modells: welche Wahrscheinlichkeiten werden über die lokale, welche über die globale Methode bestimmt und welche Optionen benutzt man jeweils zur Formulierung der Zielfunktion?

Die optimalen Antworten können nur über Testreihen gefunden werden, wobei aber schon gesagt werden kann, dass die lokale Methode vor allem auf die Einhaltung der Strukturstabilität bei jedem Übergang hinwirkt, möglicherweise aber die Marktpreise nicht sehr gut wiedergibt, wenn sie ausschließlich eingesetzt wird und überwiegend mit Daten von Optionen mit hoher Restlaufzeit gefüttert wird. Die globale Methode hat immer den Gesamtübergang von t_0 aus im Auge, versucht also tendenziell bei jedem Schritt frühere Abweichungen vom Ziel zu korrigieren. Dadurch sollte sie in der Regel die Eingangsmarktpreise besser reproduzieren.

Beide Methoden können gemischt eingesetzt werden - auch in einem Zeitschritt. Dann müssen zunächst die Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden, die nach der lokalen Methode bestimmt werden sollen. Die Ergebnisse werden dann in die Problemformulierung nach der globalen Methode eingesetzt. Hierdurch reduziert sich also auch die Zahl der Variablen und Nebenbedingungen dieses Optimierungsproblems.

Eine sinnvolle gemischte Strategie könnte beispielsweise so aussehen, dass zu den frühen Zeitpunkten durchgehend und später dann im Kernbereich um Aktienkurs und Spot-Volatilität der Ausgangssituation nach der lokalen Methode gerechnet wird, darüber hinaus aber nach der globalen. Das hätte den Vorteil, dass vor allem in diesem Kernbereich die Stabilität der Volatilitätsfläche erhalten wird, durch den Einsatz der globalen Methode im peripheren Bereich aber die Übereinstimmung mit den Marktdaten gesichert wird.

Im ersten Schritt $t_0 \to t_1$ liefern beide Verfahren übrigens identische Ergebnisse. Dies ist insofern erwähnenswert, als es in der Praxis üblich ist, Modelle in kurzen Zeitabständen neu zu berechnen. Möglicherweise ist eine feinsinnige Austarierung gar nicht nötig und man erreicht mit allen Variationen im Normalfall stabil das annähernd gleiche Ergebnis, so dass man in der Praxis ohne groß zu überlegen einfach die Gesamtheit der verfügbaren Marktdaten verwenden kann ??!

Wie auch immer die optimale Vorgehensweise zur Kalibrierung des Systems aussehen mag, profitieren sollte sie in jedem Fall von den positiven Effekten des Einsatzes der Optimierungsaufgaben, die hier noch einmal zusammengefasst seien:

- Unscharfe Marktdaten werden gemittelt
- In den Marktdaten evtl. vorhandene Arbitragemöglichkeiten werden eliminiert
- Es gibt keine Probleme mit negativen rechnerischen Übergangswahrscheinlichkeiten

Bemerkung 6 ***Korrelation und Mean Reversion.*** *Wie schon erwähnt, verzichten wir in dem Modellentwurf auf die (mögliche) Modellierung einer Korrelation zwischen den beiden Wienerprozessen, da die Modellierung der Übergangswahrscheinlichkeiten durch die Berücksichtigung der Marktpreise im endlichen Modell automatisch die richtigen lokalen Korrelationen erzeugen sollte. Gleiches gilt bezüglich der Mean-Reversion der Volatilität: Erwartungen über eine langfristige Durchschnittsvolatilität sollten sich in den Preisen langlaufender Optionen widerspiegeln. Die Situation ist bei diesem Modell grundsätzlich anders als z.B. beim Heston-Modell [15]. Dort sind Mean Reversion und Korrelation Faktoren, mit Hilfe derer das Modell an den Markt* *angepasst werden kann. In dem Modell hier fließen die Marktdaten unmittelbar ein - wie beim IVF-Modell. Im Übrigen enthält das Modell in gewisser Weise Mean Reversion. Sie ist gegeben durch die vorgesehene Unter- und Obergrenze der Volatilität σ. Stößt ein Pfad an diese Grenzen, so kommt er nicht darüber hinaus und wird irgendwann wieder ins Innere führen.*

Bemerkung 7 *Alternativ zu den quadratischen Optimierungsproblemen könnte man auch lineare Probleme aufstellen, indem man Abweichungen in der einen Richtung über lineare Nebenbedingungen ausschließt und die lineare Zielfunktion zur Minimierung der Abweichungen in der anderen Richtung einsetzt. Das könnte numerische Vorteile haben, hätte aber auch den je nach Situation erwünschten oder unerwünschten, auf jeden Fall aber interessanten Effekt, dass alle Abweichungen in die gleiche Richtung gehen.*

5 Feinschliff

Es gibt noch eine Reihe denkbarer Maßnahmen, mit denen der Modellaufbau auch unter Aspekten der Numerik und der Rechenzeit optimiert werden kann. Eine Möglichkeit ist, die Summanden der Zielfunktionen mit Gewichten versehen werden. Wählt man z.B. die Gewichte des Summanden zu einer Option umso höher, je näher ihre Fälligkeit ist, so wird man damit in der Regel (bei arbitragefreien Ausgangsdaten) die Annäherung der Plain-Vanilla-Marktpreise verbessern.

Ein großes Interesse besteht daran, dass das Modell stabil ist, eine Neuberechnung in kaum veränderter Ausgangslage darf kein völlig anderes Modell ergeben. Unter diesem Aspekt ist es zunächst günstig, die Preise möglichst vieler Optionen in das System zu speisen (zu möglichst vielen Knotenpunkten). Das hätte auch den Vorteil, dass die natürliche Unschärfe der Marktdaten ausgemittelt wird. Vor versteckten Arbitragemöglichkeiten innerhalb der Eingangsdaten muss man hierbei keine Angst haben, denn das Endergebnis ist automatisch arbitragefrei.

Es ist empfehlenswert, nicht die einzelnen am Markt festgestellten Punkte der IVF ungefiltert für die Modellbildung zu benutzen, sondern in einem vorgelagerten Schritt zunächst eine Implizite-Volatilität-Funktion zu modellieren und dann für die Kalibrierung des Baummodells künstliche, gemäß dieser IVF bewertete Optionen zu benutzen. Auch hier gilt obige Bemerkung zur Arbitragefreiheit. Wer je versucht hat, aus den Marktdaten ein glatte arbitragefreie IVF zu konstruieren, weiß, wie schwer das ist (enthaltene Arbitragemöglichkeiten fallen bei der Berechnung der zugehörigen Lokale-Volatilät-Fläche in Form von unzulässigen Werten auf (negative Quadrate)).

Dies dürften in der Regel allerdings nur kleine, praktisch nicht ausnutzbare Arbitragemöglichkeiten sein oder solche, die erst durch das eingesetzte Approximations-/Interpolationsverfahren entstanden sind, auf dem Markt also gar nicht vorhanden sind. Glücklicherweise werden diese Arbitragemöglichkeiten beim Baumaufbau automatisch entfernt. Bei der Modellierung der IVF sollte also weniger auf ihre Arbitragefreiheit geachtet werden, als vielmehr auf ihre plausible, glatte und möglichst einfache Gestalt. Vor einer Überanpassung an die Marktdaten wird allenthalben gewarnt. Sie ist für das IVF-Modell eine Quelle der Instabilität und dürfte auch unserem Modell nicht gut bekommen.

Eine weitere stabilitätsverbessernde Maßnahme könnten zusätzliche Strafsummanden (*Penalties)* in den Zielfunktionen der quadratischen Optimierungsprobleme sein. Solche Strafen könnte es z.B. für die Abweichung der Übergangswahrscheinlichkeiten von einer „Default"-Verteilung, z.B. der Gleichverteilung geben. Sind für einen Knoten $s(i,j)$ n Folgeknoten vorgesehen, so wäre also z.B.

$$\sum_k \left(q(i,j,k) - \frac{1}{n} \right)^2$$

ein solcher Penalty, der natürlich mit einem passenden Gewicht versehen werden muss, damit er nicht zu sehr von der primären Zielsetzung ablenkt.

6 Eignung für den Praxiseinsatz

Aufgrund der folgenden Eigenschaften sollte das Modell für den Einsatz in der Praxis in besonderem Maße geeignet sein:

1. Zunächst einmal arbeitet es (mit einer Ausnahme) nur mit vertrauten Größen: Aktienkurs, (Spot-)Volatilität und Implizite-Volatilität(-Fläche). Die Ausnahme stellt der einzige Parameter, die Volatilität der Volatilität α dar. Aber auch diese Größe ist in ihrer Bedeutung leicht zu verstehen, ist fast auch schon gebräuchlich zu nennen - und kann sogar eliminiert werden, indem man maschinell das α ermittelt, das die Marktdaten am besten widerspiegelt und die Annahme der Strukturstabilität 2 am besten umsetzt(Summe der optimalen Zielfunktionswerte $\rightarrow$ min).

2. Die Marktpreise der börsengehandelten Plain-Vanilla-Optionen können durch das System exakt abgebildet werden. Dies ist traditioneller- und verständlicherweise ein Punkt, auf den Händler in besonderem Maße Wert legen.

3. Das Modell geht ferner davon aus, dass sich die Implizite-Volatilitätsfläche in Abhängigkeit von Restlaufzeit und Moneyness nur langsam ändert. Dies stimmt mit den Erfahrungen der Praxis überein. Wenn ein Händler morgens ins Büro kommt, rechnet er durchaus damit, dass seit dem gestrigen Abend Aktienkurse gestiegen oder gefallen sind. Genauso kann sich die „allgemeine" Volatilät in der einen oder anderen Richtung verändert haben. Dass er aber eine strukturell völlig neue Volatilitätsfläche vorfindet, damit rechnet er eher weniger.

4. Optionspreismodelle sind Modelle für die möglichen Kursverläufe des Underlyings. Im Grunde gehen sie davon aus, dass sie während der gesamten Laufzeit der Option zutreffend sind. Es dürfte aber ausgesprochen selten sein, dass in der Praxis entsprechend verfahren wird und nach einem Modell gehedgt wird, das vor Monaten aufgestellt und kalibriert wurde. Dies ist auch nicht unbedingt zu empfehlen, wie die Untersuchung [11] zeigt. Typisch ist vielmehr die Vorgehensweise, dass der Preis einer Option nach einem frisch kalibrierten System berechnet wird und in der Folge dann das Modell regelmäßig an die Marktdaten angepasst wird Das Hedging wird jeweils auf Basis der neuesten Parameter durchgeführt. Hull und Suo haben diesen Aspekt in [17] behandelt und in diesem Zusammenhang den Begriff *CR-Modell* (*CR=Continuous Recalibration* im Gegensatz zu *SC=Single Calibration*) eingeführt. Die Anforderungen an ein Modell aus Handelssicht sind also eigentlich, dass es für einen kurzen Zeitraum gut funktioniert und dann einen möglichst verlustfreien Übergang auf ein neues System ermöglicht. Dieser Anforderung wurde bei der Konzeption des Modells Rechnung getragen, auch wenn ihre Erfüllung nicht garantiert werden kann. Neben der im vorigen Punkt angegebenen Eigenschaft sind es auch Details der Baumkonstruktion, die sich hier positiv auswirken sollten, so vor allem die große Zahl vorgesehener Verzweigungen für die nähere Zukunft, als Folge derer zu erwarten ist, dass ein Portfolio gut gegen kurzfristige Risiken abgesichert werden kann.

7 Die nächsten Schritte

Bis jetzt ist alles Theorie. Zur weitergehenden umfassenden Beurteilung des Modells sind jetzt die folgenden stichwortartig formulierten Aktivitäten sinnvoll und erforderlich:

1. Implementierung: Einsatz eines möglichst schnellen Optimierungsalgorithmus für quadratische Optimierungsverfahren (Minimierung ei-

ner positiv (semi?)definiten Zielfunktion mit linearen Nebenbedingungen); welche Baumgrößen sind in vertretbarer Zeit berechenbar? Welche Baumgrößen sind erforderlich, um hinreichend genau rechnen zu können?

2. Vergleich globale/lokale Methode und gemischte Formen; außerdem: sinnvolle Eingangsdaten (hierbei Monitoring der bei der Zielfunktion erreichten Werte, ggfs. sinnvoll aufgeschlüsselt (Abweichungen bei Fälligkeit sind in jedem Fall getrennt auszuweisen); ferner ist der Nutzen stabilisierender Penalty-Summanden zu testen; Tests zunächst anhand künstlicher Daten

3. Tests wie in 2. mit echten Handelsdaten (z.B. zu DAX-Optionen)

4. Aufbau eines adäquaten Hedgesystems; welche Greeks? Umgang mit einem „jungen" Baum (auch wenn der Baum sicher häufig rekalibriert werden wird, so wird es kaum möglich sein, das bei jeder Optionsbewertung zu tun)

5. Vergleich der Optionspreise des Modells mit denen anderer Verfahren (insbesondere für Barriers); Test des Verfahrens gemäß [17]; weitergehende empirische Untersuchungen zur strukturellen Stabilität der IVF, ggfs. Suche nach anderen typischen dynamischen Entwicklungen der IVF

6. Erweiterung auf Dividenden (stetige und absolute) und Test anhand verschiedener Aktien; Ausloten weiterer Einsatzbereiche: Währungen, Zinsderivate?

7. Gibt es einen Rückweg in die stetige Welt? Dazu müsste γ aus dem Baum numerisch bestimmt werden. Das würde bedeuten, dass die übliche partielle Differentialgleichung für Derivate aufgestellt werden könnte und somit die Finite-Differenzen-Methode zur Bewertung zur Verfügung stünde. Als nächstes könnte man fragen, ob es von γ abhängende (semi)analytische Formeln für bestimmte Optionspreise gibt. Obt das numerisch ein Gewinn wäre, ist allerdings fraglich. Am ehesten wären analog zum Heston-Modell Formeln für Calls und Puts denkbar, aber deren Preise kennt man ja schon.
   Die Frage enthält auch die theoretische Fragestellung, wie sehr sich die Begriffe des äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes bei stetigen Modellen einerseits und annähernden diskreten andererseits entsprechen.

Danksagung. Ich danke meinen Buch-Coautoren Kathrin Diener und Joachim Käsler von der BHF-Bank für die Anregung zur Beschäftigung mit Fragen der stochastischen Volatilität und die Bereitstellung der Möglichkeiten zum Abgleich von Theorie und Praxis, ich danke Filippo Pignataro und Ingo Schneider für die Unterstützung bei der Einarbeitung und Bernd Spalt sowie Matthias Wolf für die Bereitstellung von Marktdaten für Untersuchungszwecke. Schließlich danke ich der Fachhochschule Gießen-Friedberg und insbesondere meinem Fachbereich (MND) für die Bewilligung eines Forschungssemesters zur Beschäftigung mit diesem äußerst interessanten Thema.
Wilfried Hausmann Juni 2007

Literatur

[1] Andersen, L.B.G. und Brotherton-Ratcliffe, R.: *Exact Exotics*, Risk, 9 (10), Oktober 1996

[2] Andersen, L.B.G. und Brotherton-Ratcliffe, R.: *The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach*, Journal of Computational Finance, 1, (2), 5-37, Winter 1997/98

[3] Baxter, M. und Rennie, A.: *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge Univ. Press Cambridge UK, 1996 (reprinted 2000)

[4] Beckers, S.: *The Constant Elasticity of Variance Model and its Implications for Option Pricing*, Journal of Finance, XXXV(3) 661-673, June 1980

[5] Black, F. und Scholes M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81. 637 - 654, 1973

[6] Brace, A., Goldys, B., Klebaner, F. und Womersly, R.: *Market Model of Implied Volatility with Application to BGM*, working paper, UNSW, 2001

[7] Brace, A., Goldys, B., van der Hoek, J., Womersley, R.: *Markovian Models in the Stochastic Implied Volatility Framework, working paper, University of Adelaide*, September 2002

[8] Cox, J.C.: *Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions*, working paper Stanford University, 1975

[9] Derman, E. und Kani, I.: *Riding on a Smile, Risk*, 7, (2) 32-39, Februar 1994

[10] Derman, E. und Kani, I.: *Stochastic Implied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Strike and Term Structure of Volatility*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1(1) 61-110, Januar 1998

[11] Dumas B., Fleming, J. und Whaley, R.E.: *Implied Volatility Function: Empirical Tests, Journal of Finance*, 53, (6) 2059-2106, 1998

[12] Dupire, B.: *Pricing with a Smile*, Risk, 7, (1) 18-20, Februar 1994

[13] Hagan, S., Kumar, D., Lesniewski, A.S. und Woodward, D.E.: *Managing Smile Risk*, Wilmott magazine, 84-108, 2002

[14] Hausmann, W., Diener, K. und Käsler, J.: *Derivate, Arbitrage und Portfolio Selection*, vieweg Braunschweig Wiesbaden, 2002

[15] Heston, S.L.: *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, The Review of Financial Studies, 6, (2) 327-343, 1993

[16] Hull, J.C.: *Options, Futures and Other Derivatives*, 6th ed., Prentice Hall, 2006

[17] Hull, J.C. und Suo,W.: *A Methodology for the Assessment of Model Risk and Its Application to the Implied Volatility Function Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 37, (2), 297-318, Juni 2002

[18] Hull, J. und White, A.: *The pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility, Journal of Finance*, 42, 281-300, 1987

[19] Korn, R. und Korn, E.: *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*, vieweg Braunschweig Wiesbaden, 1999

[20] Ledoit, O. und Santa-Clara, P.: *Relative Pricing of Options with Stochastic Volatility,* working paper, Andersen Graduate School of Management, University of California, L.A., 1998

[21] Merton R. C.: *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141-183, 1973

[22] Rubinstein, M.: *Implied Binomial Trees*, Journal of Finance, 49, Nr. 3, 771-818, Juli 1994

[23] Schönbucher, P.J.: *A Market Model for Stochastic Implied Volatility*, Universität Bonn, Deutschland, 1998

[24] Stein, E.M. und Stein, J.C.: *Stock price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, The Review of Financial Studies, 4, (4), 727-752, 1991

Friedberger Hochschulschriften

1 Hausmann, Wilfried
Das Nimspiel, der Assemblerbefehl XR und eine merkwürdige Art, zwei und zwei zusammenzuzählen
2000

2 Abel, Ulrich; Ivan, Mircea
The asymptotic expansion for approximation operators of Favard-Szasz type
1999

3 Malerczyk, Cornelius
Visualisierungstechniken für den Sintflutalgorithmus
2000

4 Börgens, Manfred; Hemmerich, Thomas; Rüssel, Ludwig B.
Use of discriminant analysis in forecasting the success of a software development project
2000

5 Hausmann, Wilfried
On the two envelope paradox
2000

6 Abel, Ulrich
Asymptotic approximation by Bernstein-Durrmeyer operators and their derivatives
2000

7 Behler, Klaus
Hybrid Welding Technology (WWT), a flexible method for industrial applications
2000

8 Abel, Ulrich; Ivan, Mircea
Asymptotic expansion of the multivariate Bernstein polynomials on a simplex
2000

9 Hoy, Annegret; Sabzehe, Afshin
Zwei Mutationsstrategien für ein kombiniertes Maschinenbelegungs- und Lagerhaltungsproblem
2002

10 Hoy, Annegret
Zwei Mutationsvarianten für Zuordnungsprobleme
2002

11 Zima, Stefan
Zeitläufte : Dokumente der Gewerbeakademie, Polytechnikum, Ingenieurschule, Fachhochschule Bereich Friedberg der FH Gießen-Friedberg
2002

12 Zima, Stefan
Das rollende Rad
2002

13 Börgens, Manfred
Computer Aided Quality : Statistische Verfahren und optimierte Prüfmethodik
2002

14 Hoy, Annegret
Spezielle Zuordnungsprobleme
2002

15 Hoy, Annegret
Parameterschätzung im quinären System der ozeanischen Mineralsalze
2003

16 Becker, Markus; Hoy, Annegret; Weske, Henry
Mutationsexperimente für ein spezielles Rundreiseproblem
2004

17 Börgens, Manfred; Wagner, Jürgen
Zum Euler-Jahr 2007: „Zu Friedberg aß ich zu Mittag"; Leonhard Eulers Reise durch die Wetterau 1727
2007

25/1 Börgens, Manfred
25 mathematische Probleme
2003

25/2 Börgens, Manfred
25 mathematische Briefmarken
2003

26 Hausmann, Wilfried
Simultane Verbreitungs- und Bestandsdichteerfassung
2005

27 Brenneke, Kay; Hoy, Annegret; Schubert, Mathias
Parameterschätzung mit Mutationsverfahren
2006

28 Hausmann, Wilfried
Entwurf eines Optionspreismodells mit stochastischer Volatilität und tendenziell stabiler IVF-Struktur
2007