

Frank Müller

Verallgemeinerte Lösungen für die Temperaturen in
einem Gegenstrom-Wärmetauscher

THM-Hochschulschriften Band 23

Frank Müller

Verallgemeinerte Lösungen für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher

THM-Hochschulschriften Band 23

THM-Hochschulschriften Band 23

© 2023 Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und
Datenverarbeitung

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit
schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Die Hochschulschriften sind online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Verallgemeinerte Lösungen für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher

Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen
Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften
und Datenverarbeitung
Wilhelm-Leuschner-Straße 13
D-61169 Friedberg, Germany

Email: Frank.Mueller@mnd.thm.de

02. März 2023

Zusammenfassung

Dieser Artikel befasst sich mit einem Anfangs- und Randwertproblem für ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen, welches den Verlauf der Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher mit dynamischen Eintrittstemperaturen beschreibt. Da die Existenz klassischer Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems von den Anfangswerten und Eintrittstemperaturen abhängt, werden Bedingungen für die Existenz solcher klassischer Lösungen formuliert. Da diese Bedingungen in der Regel nicht erfüllt sein werden, wird eine verallgemeinerte Formulierung von Lösungen entwickelt. Diese verallgemeinerte Formulierung benötigt nur die Stetigkeit einer Lösung. Existenz und Eindeutigkeit solcher verallgemeinerter Lösungen werden bewiesen mit Hilfe eines geeigneten Integral-Operators und des Banachschen Fixpunktsatzes.

Abstract

This article is concerned with an initial and boundary value problem for a hyperbolic system that describes the behaviour of the temperatures in a counter current heat exchanger with dynamic inlet temperatures. Since the existence of classical solutions depends on the initial values and the inlet temperatures, conditions for existence of classical solutions are formulated. For the more general case a generalized formulation of solutions is developed. This generalized formulation only requires continuity from solutions. Existence and uniqueness of such solutions can be proven by defining an appropriate integral operator and using Banach's fix point theorem.

Keywords

Hyperbolic system, Initial and boundary value problem, Counter current heat exchanger, Classical and generalized solutions, Fix point theorem

1 Einleitung

Wärmetauscher übertragen thermische Energie (Wärme) von einem fließenden Fluid auf ein anderes fließendes Fluid und spielen eine wichtige Rolle in vielen industriellen Anwendungen. Die beiden Fluide sind getrennt durch eine Trennwand, somit findet der Wärmeaustausch durch diese Trennwand statt. In diesem Artikel wird ein Gegenstrom-Wärmetauscher betrachtet, hier fließen die beiden Fluide in entgegengesetzte Richtung. Es gibt auch noch das Parallelstromprinzip und das Kreuzstromprinzip.

Wir betrachten einen Gegenstrom-Wärmetauscher der Länge L . Die Temperaturen im Punkt x zur Zeit t auf der Primärseite und auf der Sekundärseite bezeichnen wir mit $\vartheta_1(x, t)$ und $\vartheta_2(x, t)$. Beginnend zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ tritt auf der Primärseite im Punkt $x = 0$ das wärmere Fluid mit der dynamischen Eintrittstemperatur $\vartheta_{1, \text{ein}}(t)$ und der konstanten Geschwindigkeit v_1 in den Wärmetauscher ein, gibt Wärme an das Fluid auf der Sekundärseite ab, und tritt an der Stelle $x = L$ wieder aus dem Wärmetauscher aus. Auf der Sekundärseite tritt im Punkt $x = L$ das kältere Fluid mit der dynamischen Eintrittstemperatur $\vartheta_{2, \text{ein}}(t)$ und der konstanten Geschwindigkeit v_2 in den Wärmetauscher ein, nimmt Wärme von der Primärseite auf und verlässt an der Stelle $x = 0$ den Wärmetauscher wieder. Abbildung 1 zeigt eine Prinzipskizze des Wärmetauschers.

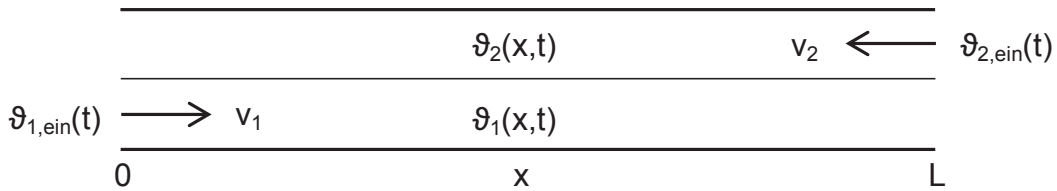


Abbildung 1: Prinzipskizze eines Gegenstrom-Wärmetauschers

Vernachlässigt man Diffusionseffekte und thermische Verluste nach außen, so liefert eine Energiebilanz mit einem linearen Wärmeübertragungsmodell das folgende Anfangs- und Randwertproblem für die Temperaturen im Wärmetauscher:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vartheta_1(x, t) = -v_1 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_1(x, t) - \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_1}, \quad (x, t) \in U_T \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vartheta_2(x, t) = v_2 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2(x, t) + \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_2}, \quad (x, t) \in U_T \quad (2)$$

$$\vartheta_1(x, 0) = \vartheta_{1,0}(x), \quad x \in [0, L] \quad (3)$$

$$\vartheta_2(x, 0) = \vartheta_{2,0}(x), \quad x \in [0, L] \quad (4)$$

$$\vartheta_1(0, t) = \vartheta_{1, \text{ein}}(t), \quad t \in (0, T] \quad (5)$$

$$\vartheta_2(L, t) = \vartheta_{2, \text{ein}}(t), \quad t \in (0, T] \quad (6)$$

Hierbei sind $\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}$ gegebene stetige Anfangswerte auf der Primär- und Sekundärseite, die Werte T_1, T_2 sind Zeitkonstanten, T ist die Beobachtungszeit des Prozesses und

$$U_T = (0, L) \times (0, T] \quad (7)$$

bezeichnet den parabolischen Zylinder.

Die Ortsabhängigkeit in (1) - (6) wird durch nur eine Ortsvariable x beschrieben. Somit ist das zugrunde liegende mathematische Modell ein 1D Modell im Ort. Dies ist natürlich eine Vereinfachung der realen Situation und daher können nicht alle physikalischen Phänomene durch ein solches 1D Modell beschrieben werden.

Gegenstrom-Wärmetauscher werden in der Heizungstechnik z.B. in Form von Plattenwärmetauschern zur Warmwasserbereitung in einem direkten Durchflussprinzip oder auch zum Laden von Schichtenladespeichern eingesetzt. Eine weitere Möglichkeit der Warmwasserversorgung ist der Einsatz von Rohrwendelspeichern. In diesem Fall findet der Wärmetausch innerhalb des Rohrwendelspeichers durch die Rohrwendel statt. Ein solcher Rohrwendelspeicher kann daher als ein Doppelrohr-Gegenstrom-Wärmetauscher betrachtet werden.

Für den Entladeprozess in einem Schichtenladespeicher wurde in [1] ein Approximationsverfahren entwickelt. Das Verfahren kann auf den Ladeprozess in einem Schichtenladespeicher übertragen werden, jedoch nicht auf den Ladeprozess in einem Rohrwendelspeicher, da hier die Wärmeübertragung durch Wärmetausch und nicht durch Konvektion stattfindet. Da der Rohrwendelspeicher im Ladeprozess als Doppelrohr-Gegenstrom-Wärmetauscher betrachtet werden kann, ist somit die Untersuchung des dynamischen Verhaltens eines Gegenstrom-Wärmetauschers von großem Interesse.

Das PDE System (1) + (2) ist ein hyperbolisches System [2, 3] und daher ist die Existenz klassischer Lösungen [2, 3, 4] des Anfangs- und Randwertproblems abhängig von den Anfangswerten und den Eintrittstemperaturen, wie es für hyperbolische Probleme charakteristisch ist. Die Methode der Charakteristiken [2, 3] führt hier nicht auf ein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen aber auf ein äquivalentes System von Integralgleichungen.

Da es im allgemeinen Fall keine klassischen Lösungen gibt, verwenden vielen Anwendungen numerische Methoden, um Approximationen zu erhalten. Jaswon und Smith [8] konstruieren Approximationen mit Reihen modifizierter Bessel Funktionen [9]. Zavala-Rio und Santiesteban-Cos [5, 6] sowie Huhtala und Paunonen [7] nutzen Halbgruppentheorie [3, 4]. Gvozdenac [10, 11] verwendet die Laplace Transformation und erhält ebenfalls Reihen von modifizierten Bessel Funktionen. Die Anwendung der inversen Laplace Transformation führt auf eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art und wird numerisch behandelt mit einer Kollokationsmethode [12, 13]. Kreuzinger, Bitzer und Marquardt [14] verwenden eine Linienmethode (method of lines) [15] zur numerischen Behandlung. Verschiedene räumliche Diskretisierungen höherer Ordnung werden betrachtet und zur Integration des resultierenden DGL Systems wird ein Standard Solver verwendet. Nash, Badithela und Jain [16] betrachten einen Rohrwendelspeicher, der als Gegenstrom-Wärmetauscher angesehen werden kann. Der Speicher wird vertikal Orts-diskretisiert und in jedem finiten Teilvolumen werden Energieerhaltungsmethoden [17, 18] verwendet, um ein DGL System zu erhalten (Finite Volumen Methode). Das DGL System wird dann mit einem Finite Differenzen Schema in Verbindung mit einer Temperatur Inversions-Korrektur-Methode [19] behandelt. Wagner, Meurer und Kugi [20] behandeln den Fall linearer und nichtlinearer Wärmeübertragung mit Potenzreihenansätzen und einer geeigneten Gebietszerlegung.

In diesem Artikel wird eine verallgemeinerte Formulierung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) in Form eines Systems von Integralgleichungen entwickelt. Hierbei sind Lösungen stetige Funktionen. Da das zugrunde liegende mathematische Modell keine Diffusionsterme enthält, kann von den Lösungen im allgemeinen Fall keine Glattheit erwartet werden und daher erscheint die verallgemeinerte Formulierung dem Problem besser angepasst. Durch die Definition eines geeigneten Integral-Operators und eines geeigneten Banachraumes, können Existenz und Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen werden. Die zugehörige Picard Iteration liefert ein Verfahren zur Berechnung der Lösung. Diese verallgemeinerte Lösung kann auch zum Benchmarking numerischer Methoden verwendet werden.

2 Charakteristiken

Das PDE System (1) + (2) kann geschrieben werden in der Form:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + A \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = B \vartheta \quad (8)$$

mit:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & -v_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -T_1^{-1} & T_1^{-1} \\ T_2^{-1} & -T_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad \vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Die Matrix A ist eine Diagonalmatrix und die Eigenwerte sind gegeben durch:

$$\lambda_1 = v_1, \quad \lambda_2 = -v_2 \quad (10)$$

Also ist das PDE System (1) + (2) ein hyperbolisches System in Normaldarstellung. Die Anfangs- und Randbedingungen (3) - (6) liefern Cauchy Daten auf der Kurve:

$$\Gamma = \left(\{0\} \times (0, T] \right) \cup \left([0, L] \times \{0\} \right) \cup \left(\{L\} \times (0, T] \right) \quad (11)$$

Die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{\partial x_i(\xi_i, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_i, \quad \frac{\partial t_i(\xi_i, \tau)}{\partial \tau} = 1, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

führen auf:

$$x_i(\xi_i, \tau) = z_i(\xi_i) + \lambda_i \tau, \quad t_i(\xi_i, \tau) = w_i(\xi_i) + \tau, \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

mit Funktionen z_i, w_i . Die Anfangsbedingungen

$$x_i(\xi_i, 0) = \xi_i, \quad t_i(\xi_i, 0) = 0 \quad (14)$$

liefern

$$z_i(\xi_i) = \xi_i, \quad w_i(\xi_i) = 0 \quad (15)$$

und somit die Charakteristiken:

$$x_i(\xi_i, \tau) = \xi_i + \lambda_i \tau, \quad t_i(x, \tau) = \tau \quad (16)$$

Für jedes $x \in (0, L)$ und genügend kleine Werte von t existiert genau ein $\xi_i(x, t)$, so dass die Charakteristik

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} x_i(\xi_i(x, t), \tau) \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_i(x, t) + \lambda_i \tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad (17)$$

auf der x -Achse im Intervall $[0, L]$ startet und durch den Punkt (x, t) geht. Wegen

$$x_i(\xi_i(x, t), t) = x \quad \Leftrightarrow \quad \xi_i(x, t) + \lambda_i t = x \quad (18)$$

ist dieser Wert gegeben durch:

$$\xi_i(x, t) = x - \lambda_i t \quad (19)$$

Der Punkt

$$P_i(x, t) = \begin{pmatrix} \xi_i(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \lambda_i t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

ist dann der Startpunkt dieser Charakteristik auf der x -Achse.

Für wachsende Werte von t verlässt der Punkt $\xi_i(x, t) = x - \lambda_i t$ das Intervall $[0, L]$. Wegen $\lambda_1 > 0$, verlässt der Punkt $\xi_1(x, t)$ das Intervall auf der linken Seite und wegen $\lambda_2 < 0$ verlässt der Punkt $\xi_2(x, t)$ das Intervall auf der rechten Seite. In Abbildung 2 ist die Situation für die Charakteristik zu λ_1 dargestellt.

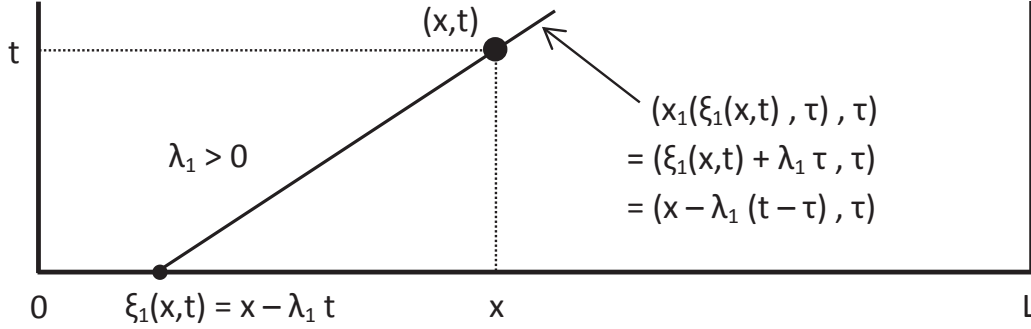


Abbildung 2: Charakteristik zu λ_1 durch den Punkt (x, t) .

Es sei nun $\tau_i(x)$ der Zeitpunkt, zu dem $\xi_i(x, t)$ das Intervall $[0, L]$ verlässt. Dann erhalten wir:

$$0 = x_i(\xi_1(x, t), \tau) = z_1(\xi_1(x, t)) + \lambda_1 \tau, \quad \tau > \tau_1(x) \quad (21)$$

$$L = x_i(\xi_2(x, t), \tau) = z_2(\xi_2(x, t)) + \lambda_2 \tau, \quad \tau > \tau_1(x) \quad (22)$$

und somit:

$$z_i(\xi_i(x, t), \tau) = \begin{cases} \xi_i(x, t) & , \quad \tau < \tau_i(x) \\ -\lambda_1 \tau & , \quad i = 1 \wedge \tau \geq \tau_1(x) \\ L - \lambda_2 \tau & , \quad i = 2 \wedge \tau \geq \tau_2(x) \end{cases} \quad (23)$$

Aus

$$\tau = t_i(\xi_i, \tau) = w_i(\xi_i) + \tau \quad (24)$$

können wir $w_i = 0$ schließen. Mit (13) und (19) folgt nun:

$$x_i(x - \lambda_i t, \tau) = \begin{cases} x - \lambda_i(t - \tau) & , \quad \tau < \tau_i(x) \\ 0 & , \quad i = 1 \wedge \tau \geq \tau_1(x) \\ L & , \quad i = 2 \wedge \tau \geq \tau_2(x) \end{cases} \quad (25)$$

und:

$$t_i(x - \lambda_i t, \tau) = \tau \quad (26)$$

Mit

$$\xi_i(x, \tau_i(x)) = x - \lambda_i \tau_i(x) = \begin{cases} 0 & , \quad i = 1 \\ L & , \quad i = 2 \end{cases}$$

erhalten wir:

$$\tau_1(x) = \frac{x}{\lambda_1}, \quad \tau_2(x) = -\frac{L - x}{\lambda_2} = \frac{L - x}{|\lambda_2|} \quad (27)$$

Der Startpunkt der Charakteristik zu λ_i durch (x, t) ist dann gegeben durch:

$$P_i(x, t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x - \lambda_i t \\ 0 \end{pmatrix} & , \quad t < \tau_i(x) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ t - \tau_1(x) \end{pmatrix} & , \quad i = 1 \wedge t \geq \tau_1(x) \\ \begin{pmatrix} L \\ t - \tau_2(x) \end{pmatrix} & , \quad i = 2 \wedge t \geq \tau_2(x) \end{cases} \quad (28)$$

3 Klassische Lösungen

Definition 1. Jede Funktion $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T \in C^1(U_T, \mathbb{R}^2) \cap C(\overline{U_T}, \mathbb{R}^2)$, die das PDE System (1) + (2) im klassischen Sinne löst und außerdem (3) - (6) erfüllt, heißt klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems.

Satz 1. Das Anfangs- und Randwertproblem (1) - (6) besitzt höchstens eine klassische Lösung.

Beweis. Seien φ und ψ zwei Lösungen. Wir setzen $\vartheta = \varphi - \psi$. Für $(x, t) \in U_T$ gilt dann:

$$\vartheta_2(x, t) = T_1 \frac{\partial}{\partial t} \vartheta_1(x, t) + v_1 T_1 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_1(x, t) + \vartheta_1(x, t) \quad (29)$$

$$\vartheta_1(x, t) = T_2 \frac{\partial}{\partial t} \vartheta_1(x, t) - v_2 T_2 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2(x, t) + \vartheta_2(x, t) \quad (30)$$

und:

$$\vartheta_1(x, 0) = \vartheta_2(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L] \quad (31)$$

sowie:

$$\vartheta_1(0, t) = \vartheta_2(L, t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (32)$$

Multiplikation von (29) mit $\vartheta_1(x, t)$ und Integration über U_T liefert:

$$\begin{aligned} \int_{U_T} \vartheta_1(x, t) \vartheta_2(x, t) d(x, t) &= \frac{T_1}{2} \int_0^L \vartheta_1^2(x, T) dx + \frac{v_1 T_1}{2} \int_0^T \vartheta_1^2(L, t) dt \\ &+ \int_{U_T} \vartheta_1^2(x, t) d(x, t) \end{aligned} \quad (33)$$

Entsprechende Multiplikation von (30) mit $\vartheta_2(x, t)$ und Integration über U_T liefert:

$$\begin{aligned} \int_{U_T} \vartheta_1(x, t) \vartheta_2(x, t) d(x, t) &= \frac{T_2}{2} \int_0^L \vartheta_2^2(x, T) dx + \frac{v_2 T_2}{2} \int_0^T \vartheta_2^2(0, t) dt \\ &+ \int_{U_T} \vartheta_2^2(x, t) d(x, t) \end{aligned} \quad (34)$$

Durch Addition von (33) und (34) erhalten wir:

$$\begin{aligned} &2 \int_{U_T} \vartheta_1(x, t) \vartheta_2(x, t) d(x, t) \\ &= \int_0^L \frac{T_1 \vartheta_1^2(x, T) + T_2 \vartheta_2^2(x, T)}{2} dx + \int_0^T \frac{v_1 T_1 \vartheta_1^2(L, t) + v_2 T_2 \vartheta_2^2(0, t)}{2} dt \\ &+ \int_{U_T} \vartheta_1^2(x, t) d(x, t) + \int_{U_T} \vartheta_2^2(x, t) d(x, t) \end{aligned} \quad (35)$$

und somit:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \frac{T_1 \vartheta_1^2(x, T) + T_2 \vartheta_2^2(x, T)}{2} dx + \int_0^T \frac{v_1 T_1 \vartheta_1^2(L, t) + v_2 T_2 \vartheta_2^2(0, t)}{2} dt \\ &+ \int_{U_T} (\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t))^2 d(x, t) \end{aligned} \quad (36)$$

Da alle Terme auf der rechten Seite der Gleichung (36) nicht-negativ sind, können wir unter den Regularitätsannahmen schließen:

$$\vartheta_1(x, T) = \vartheta_2(x, T) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (37)$$

$$\vartheta_1(L, t) = \vartheta_2(0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (38)$$

$$\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in U_T \quad (39)$$

Mit

$$\mu(x, t) = \vartheta_1(x, t) = \vartheta_2(x, t) \quad (40)$$

erhalten wir aus (29) und (30) das lineare Gleichungssystem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(x, t) + v_1 \frac{\partial}{\partial x} \mu(x, t) = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(x, t) - v_2 \frac{\partial}{\partial x} \mu(x, t) = 0 \quad (42)$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ 1 & -v_2 \end{pmatrix} = -v_2 - v_1 < 0 \quad (43)$$

besitzt dieses lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung. Dies bedeutet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \mu(x, t) = 0 \quad (44)$$

Also ist μ konstant. Wegen $\mu(0, t) = 0$ ist dieser konstante Wert $\mu = 0$. Hieraus folgt nun $\varphi = \psi$ und der Beweis ist abgeschlossen. \square

Satz 2. (Kompatibilitätsbedingungen) Eine klassische Lösung von (1) - (6) kann nur existieren, wenn die Anfangswerte und Eintrittstemperaturen die folgenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllen:

$$\vartheta_{1,0}(0) = \vartheta_{1, \text{ein}}(0) \quad (45)$$

$$\vartheta_{2,0}(L) = \vartheta_{2, \text{ein}}(0) \quad (46)$$

$$\frac{d\vartheta_{1, \text{ein}}(0)}{dt} + v_1 \frac{d\vartheta_{1,0}(0)}{dx} = \frac{\vartheta_{2,0}(0) - \vartheta_{1,0}(0)}{T_1} \quad (47)$$

$$\frac{d\vartheta_{2, \text{ein}}(0)}{dt} - v_2 \frac{d\vartheta_{2,0}(L)}{dx} = \frac{\vartheta_{1,0}(L) - \vartheta_{2,0}(L)}{T_2} \quad (48)$$

Beweis. Sei $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T$ eine klassische Lösung von (1) - (6). Da die Eintrittstemperaturen stetige Funktionen sind, erhalten wir:

$$\vartheta_{1,0}(0) = \vartheta_1(0, 0) = \lim_{t \searrow 0} \vartheta_1(0, t) = \lim_{t \searrow 0} \vartheta_{1, \text{ein}}(t) = \vartheta_{1, \text{ein}}(0) \quad (49)$$

$$\vartheta_{2,0}(L) = \vartheta_2(L, 0) = \lim_{t \searrow 0} \vartheta_2(L, t) = \lim_{t \searrow 0} \vartheta_{2, \text{ein}}(t) = \vartheta_{2, \text{ein}}(0) \quad (50)$$

und somit (45) + (46). Unter der Voraussetzung, dass die Anfangswerte und Eintrittstemperaturen die notwendige Regularität besitzen, erhalten wir (47) + (48) aus (1) + (2) durch Vertauschen der Grenzprozesse $t \searrow 0$ und $x \searrow 0$ sowie $t \searrow 0$ und $x \nearrow L$. \square

Bemerkung 1. Die Bedingungen aus Satz 2 können wie folgt interpretiert werden. Da das System (1) + (2) keine Diffusionsterme enthält, kann eine initiale Unstetigkeit nicht geglättet werden, wie es durch Diffusionsterme geschehen würde. Eine anfängliche Unstetigkeit würde sich somit entlang der Charakteristiken mit der Geschwindigkeit v_1 auf der Primärseite und mit der Geschwindigkeit v_2 auf der Sekundärseite fortpflanzen. Durch den Wärmetauschprozess würde sich die Sprunghöhe der Unstetigkeit mit wachsender Zeit verkleinern, sie kann jedoch, im Unterschied zu Diffusionseffekten, nicht geglättet werden. Das Gleiche gilt für die Ableitungen.

4 Verallgemeinerte Lösungen

Ist ϑ eine klassische Lösung des PDE Systems (1) + (2), so erhalten wir entlang der Charakteristik zu λ_i für die Komponenten:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tau} e^{b_{ii}(t-\tau)} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) \\
&= -b_{ii} e^{b_{ii}(t-\tau)} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) + e^{b_{ii}(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) \\
&= -b_{ii} e^{b_{ii}(t-\tau)} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) \\
&\quad + e^{b_{ii}(t-\tau)} \sum_{j=1}^2 b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) \\
&= e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau), \quad i \neq j
\end{aligned} \tag{51}$$

Hierbei bezeichnen die b_{ij} die Elemente der Matrix B aus (9). Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ liefert das System (51) kein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen und somit führt die Methode der Charakteristiken hier nicht zu einer Lösung.

Integrieren wir (51), so liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für $t < \tau_i(x)$:

$$\begin{aligned}
\vartheta_i(x, t) - e^{b_{ii}t} \vartheta_i(x - \lambda_i t, 0) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} e^{b_{ii}(t-\tau)} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\
&= \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau, \quad i \neq j
\end{aligned} \tag{52}$$

und für $t \geq \tau_i(x)$:

$$\begin{aligned}
& \vartheta_i(x, t) - e^{b_{ii} \tau_i(x)} \vartheta_i(x - \lambda_i \tau_i(x), t - \tau_i(x)) \\
&= \int_{t-\tau_i(x)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} e^{b_{ii}(t-\tau)} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\
&= \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau, \quad i \neq j
\end{aligned} \tag{53}$$

Wenn ϑ die Anfangsbedingungen (3) + (4) erfüllt, so können für $t \leq \tau_i(x)$ die Werte $\vartheta_i(x - \lambda_i t, 0)$ ausgedrückt werden durch die Anfangswerte, und wenn ϑ außerdem die Randbedingungen (5) and (6) erfüllt, so sind für $t > \tau_i(x)$ die Werte $\vartheta_i(x - \lambda_i \tau_i(x), t - \tau_i(x))$ gegeben durch die Randwerte. Wir erhalten somit:

$$\vartheta_i(x - \lambda_i t, 0) = \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t), \quad t < \tau_i(x) \tag{54}$$

$$\vartheta_i(x - \lambda_i \tau_i(x), t - \tau_i(x)) = \vartheta_{i, \text{ein}}(t - \tau_i(x)), \quad t \geq \tau_i(x) \tag{55}$$

Bemerkung 2. Hierbei ist zu beachten, dass dies Regularitätsbedingungen an die Funktionen ϑ_0 und ϑ_{ein} stellt. Da eine klassische Lösung ϑ stetig partiell differenzierbar ist, müssen die Funktionen ϑ_0 und ϑ_{ein} stetig differenzierbar sein, zusätzlich zu den Kompatibilitätsbedingungen (45) - (48).

Definition 2. Für eine gegebene Menge M bezeichnet die Funktion $\mathbf{1}_M$ die Indikatorfunktion der Menge M .

Satz 3. Jede klassische Lösung $\vartheta : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) kann dargestellt werden in der Form:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(e^{b_{ii}t} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \right) \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) e^{b_{ii} \tau_i(x)} \vartheta_{i, \text{ein}}(t - \tau_i(x)), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (56)$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich direkt aus der bisher durchgeführten Analyse. \square

Von Satz 3 wissen wir, dass jede klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) eine Lösung der Integralgleichung (56) ist. Eine Lösung der Integralgleichung (56) muss jedoch nicht partiell differenzierbar sein. Dies wird auf die Definition von verallgemeinerten Lösungen führen.

Definition 3. Für jede stetige Funktion $\vartheta : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieren wir die Funktion $F\vartheta : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch:

$$\begin{aligned} (F\vartheta)_i(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(e^{b_{ii}t} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \right) \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) e^{b_{ii} \tau_i(x)} \vartheta_{i, \text{ein}}(t - \tau_i(x)), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (57)$$

Satz 4. Es seien die Kompatibilitätsbedingungen (45) + (46) erfüllt. Dann ist für jede stetige Funktion ϑ auch die Funktion $F\vartheta$ stetig.

Beweis. Da $\vartheta_0, \vartheta_{\text{ein}}$ und ϑ stetig sind, muss nur die Stetigkeit in $t = \tau_i(x)$ untersucht werden. Wir erhalten:

$$\lim_{t \nearrow \tau_i(x)} (F\vartheta)_i(x, t) = \lim_{t \searrow \tau_i(x)} (F\vartheta)_i(x, t) \Leftrightarrow \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i \tau_i(x)) = \vartheta_{i, \text{ein}}(0) \quad (58)$$

Da die Bedingungen (45) + (46) erfüllt sind, ist die rechte Seite für $i = 1, 2$ erfüllt und somit auch die linke Seite. \square

Satz 5. Es seien die Kompatibilitätsbedingungen (45) + (46) erfüllt. Dann gibt es genau eine Lösung $\vartheta \in C([0, L] \times [0, T], \mathbb{R}^2)$ der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$.

Beweis. Die Menge $X = C([0, L] \times [0, T], \mathbb{R}^2)$ ausgestattet mit der Norm

$$\|\vartheta\|_\infty = \max \{ \|\vartheta_1\|_\infty, \|\vartheta_2\|_\infty \} \quad (59)$$

bildet einen Banachraum. Da die Bedingungen (45) + (46) erfüllt sind, ist für jedes $\vartheta \in X$ auch $F\vartheta \in X$. Dies bedeutet, der Operator $F : \vartheta \mapsto F\vartheta$ ist ein Operator $X \rightarrow X$. Für $\vartheta, \varphi \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} & |(F\vartheta)_i(x, t) - (F\varphi)_i(x, t)| \\ & \leq |b_{ij}| \|\vartheta - \varphi\|_\infty \left(\mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} d\tau + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), \infty)}(t) \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} d\tau \right) \\ & = \|\vartheta - \varphi\|_\infty \left(\mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(1 - e^{-T_i^{-1}t} \right) + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), \infty)}(t) \left(1 - e^{-T_i^{-1}\tau_i(x)} \right) \right) \\ & \leq \|\vartheta - \varphi\|_\infty \left(\mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(1 - e^{-T_i^{-1}\tau_i(x)} \right) + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), \infty)}(t) \left(1 - e^{-T_i^{-1}\tau_i(x)} \right) \right) \\ & = \|\vartheta - \varphi\|_\infty \left(1 - e^{-T_i^{-1}\tau_i(x)} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

und somit:

$$\|(F\vartheta)_i - (F\varphi)_i\|_\infty \leq \|\vartheta - \varphi\|_\infty \max_{x \in [0, L]} \left(1 - e^{-T_i^{-1}\tau_i(x)}\right) \quad (61)$$

Mit (27) und (10) erhalten wir:

$$\max_{x \in [0, L]} \tau_1(x) = \frac{L}{v_1}, \quad \max_{x \in (0, L)} \tau_2(x) = \frac{L}{v_2} \quad (62)$$

und dies führt zu:

$$\|(F\vartheta)_i - (F\varphi)_i\|_\infty \leq \|\vartheta - \varphi\|_\infty \left(1 - e^{-\frac{L}{v_i T_i}}\right) \quad (63)$$

Setzen wir

$$q = \max \left\{ \left(1 - e^{-\frac{L}{v_1 T_1}}\right), \left(1 - e^{-\frac{L}{v_2 T_2}}\right) \right\}$$

so erhalten wir schließlich:

$$\|F\vartheta - F\varphi\|_\infty \leq q \|\vartheta - \varphi\|_\infty \quad (64)$$

Da $q < 1$ ist, ist der Operator F eine kontrahierende Selbstabbildung auf X und der Banachsche Fixpunktsatz liefert den Beweis. \square

Korollar 6. Seien $\vartheta_0 \in C^1([0, L], \mathbb{R}^2)$ und $\vartheta_{ein} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^2)$ und es seien die Kompatibilitätsbedingungen (45) - (48) erfüllt. Dann ist die eindeutige Lösung aus Satz 5 stetig partiell differenzierbar.

Beweis. Für jeden Startwert in X konvergiert die Folge der Picard Iterierten bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und somit gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung ϑ aus dem Satz. Setzen wir $\vartheta_i^{[0]} = 0$ für $i = 1, 2$, so sind die Iterierten $v_i^{[1]}$ mit

$$\begin{aligned} \vartheta_i^{[1]}(x, t) &= (F\vartheta^{[0]})_i(x, t) \\ &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) e^{b_{ii}t} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), \infty)}(t) e^{b_{ii}\tau_i(x)} \vartheta_{i,ein}(t - \tau_i(x)) \end{aligned} \quad (65)$$

stetig partiell differenzierbar aufgrund der Regularitätsvoraussetzungen an ϑ_0 und ϑ_{ein} sowie der Kompatibilitätsbedingungen. Durch Induktion folgt nun, dass alle $v^{[k]}$ mit

$$\begin{aligned} \vartheta_i^{[k]}(x, t) &= (F\vartheta^{[k-1]})_i(x, t) \\ &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(e^{b_{ii}t} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j^{[k-1]}(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \right) \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j^{[k-1]}(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) e^{b_{ii}\tau_i(x)} \vartheta_{i,ein}(t - \tau_i(x)) \end{aligned} \quad (66)$$

für $k \geq 1$ stetig partiell differenzierbar sind und die Folgen der partiellen Ableitungen der Picard Iterierten gleichmäßig konvergieren. Hieraus folgt, dass die Lösung ϑ stetig partiell differenzierbar ist. \square

Satz 7. Seien $\vartheta_0 \in C^1([0, L], \mathbb{R}^2)$ und $\vartheta_{ein} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^2)$ und es seien die Kompatibilitätsbedingungen (45) - (48) erfüllt. Dann ist jede Lösung ϑ der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$ eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6).

Beweis. Wir wissen bereits, dass ϑ stetig partiell differenzierbar ist. Aus (57) kann direkt gesehen werden, dass ϑ die Anfangs- und Randbedingungen (3) - (6) erfüllt. Mit der Leibniz Regel für Parameter Integrale können die partiellen Ableitungen wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial (F\vartheta)_i(x, t)}{\partial x} \\ &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(e^{b_{ii} t} \vartheta'_{i,0}(x - \lambda_i t) + b_{ij} \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} \partial_1 \vartheta_j(\cdot, \tau) d\tau \right) \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \frac{1}{\lambda_i} \left(b_{ii} e^{b_{ii} \tau_i(x)} \vartheta_{i, \text{ein}}(t - \tau_i(x)) - e^{b_{ii} \tau_i(x)} \vartheta'_{i, \text{ein}}(t - \tau_i(x)) \right. \\ &\quad \left. + e^{b_{ii} \tau_i(x)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i \tau_i(x), t - \tau_i(x)) + \lambda_i b_{ij} \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} \partial_1 \vartheta_j(\cdot, \tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (67)$$

und:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial (F\vartheta)_i(x, t)}{\partial t} \\ &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(b_{ij} \vartheta_j(x, t) + b_{ii} e^{b_{ii} t} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) - \lambda_i e^{b_{ii} t} \vartheta'_{i,0}(x - \lambda_i t) \right. \\ &\quad \left. + b_{ii} \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \vartheta_j(\cdot, \tau) d\tau - \lambda_i \int_0^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \partial_1 \vartheta_j(\cdot, \tau) d\tau \right) \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \left(b_{ij} \vartheta_j(x, t) + e^{b_{ii} \tau_i(x)} \vartheta'_{i, \text{ein}}(t - \tau_i(x)) \right. \\ &\quad \left. - e^{b_{ii} \tau_i(x)} b_{ij} \vartheta_j(x - \lambda_i \tau_i(x), t - \tau_i(x)) \right. \\ &\quad \left. + b_{ii} \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} (b_{ij} \vartheta_j(\cdot, \tau)) d\tau - \lambda_i \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{b_{ii}(t-\tau)} b_{ij} \partial_1 \vartheta_j(\cdot, \tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (68)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial x} = b_{ij} \vartheta_j(x, t) + b_{ii} \vartheta_i(x, t) \quad (69)$$

und somit löst ϑ das PDE System (1) + (2). \square

Sind ϑ_0 und ϑ_{ein} stetig differenzierbare Funktionen und sind die Kompatibilitätsbedingungen (45) - (48) erfüllt, so ist die Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$ äquivalent zum Anfangs- und Randwertproblem (1) - (6). Für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Fixpunktgleichung müssen jedoch nur Stetigkeit von ϑ_0 und ϑ_{ein} sowie nur (45) + (46) gefordert werden. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 4. *Jede stetige Lösung der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$ heißt verallgemeinerte Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6).*

Ist ϑ die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$, so konvergiert für jeden Startwert $\vartheta^{[0]} \in X$ die Folge der Picard Iterierten $\vartheta^{[k+1]} = F\vartheta^{[k]}$, $k \in \mathbb{N}_0$ gegen die eindeutige Lösung ϑ . Für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten dann die bekannte a priori Abschätzung:

$$\|\vartheta - \vartheta^{[k]}\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \|\vartheta^{[1]} - \vartheta^{[0]}\|_\infty \quad (70)$$

und die bekannte a posteriori Abschätzung:

$$\|\vartheta - \vartheta^{[k]}\|_\infty \leq \frac{q}{1-q} \|\vartheta^{[k]} - \vartheta^{[k-1]}\|_\infty \quad (71)$$

5 Beispiel

In diesem Beispiel betrachten wir einen Wärmetauscher der lange in Ruhe war. Somit sind die Temperaturen der Fluide auf beiden Seiten abgekühlt auf die konstante Umgebungstemperatur ϑ_A . Weiterhin nehmen wir an, dass die Eintrittstemperatur auf der Sekundärseite gleich der Umgebungstemperatur ist. Zum Startzeitpunkt $t = 0$ wird auf der Primärseite die Lade-Eintrittstemperatur $\vartheta_{Lade} > \vartheta_A$ aufgeschaltet. Da noch kaltes Fluid im hydraulischen System ist, können wir annehmen, dass die Eintrittstemperatur auf der Primärseite nicht springt, sondern sich von ϑ_A der Lade-Eintrittstemperatur ϑ_{Lade} annähert. Wir beschreiben dies mit Hilfe einer Exponentialfunktion. Somit erhalten wir die folgenden Anfangswerte und Eintrittstemperaturen:

$$\vartheta_{1,0}(x) = \vartheta_A \quad (72)$$

$$\vartheta_{2,0}(x) = \vartheta_A \quad (73)$$

$$\vartheta_{1,ein}(t) = \vartheta_{Lade} + (\vartheta_A - \vartheta_{Lade}) e^{-\frac{10}{T}t} \quad (74)$$

$$\vartheta_{2,ein}(t) = \vartheta_A \quad (75)$$

Die Bedingungen (45) und (46) sind offensichtlich erfüllt. Wegen:

$$\frac{d\vartheta_{1,ein}(0)}{dt} + v_1 \frac{d\vartheta_{1,0}(0)}{dx} = -\frac{10}{T} (\vartheta_A - \vartheta_{Lade}) \quad (76)$$

$$\frac{\vartheta_{2,0}(0) - \vartheta_{1,0}(0)}{T_1} = 0 \quad (77)$$

würde die Bedingung (47) nur erfüllt sein für $\vartheta_A = \vartheta_{Lade}$. Dies bedeutet, dass eine klassische Lösung nur existiert für den trivialen Fall $\vartheta_{1,ein}(t) = \vartheta_A$ und die eindeutige klassische Lösung wäre dann gegeben durch:

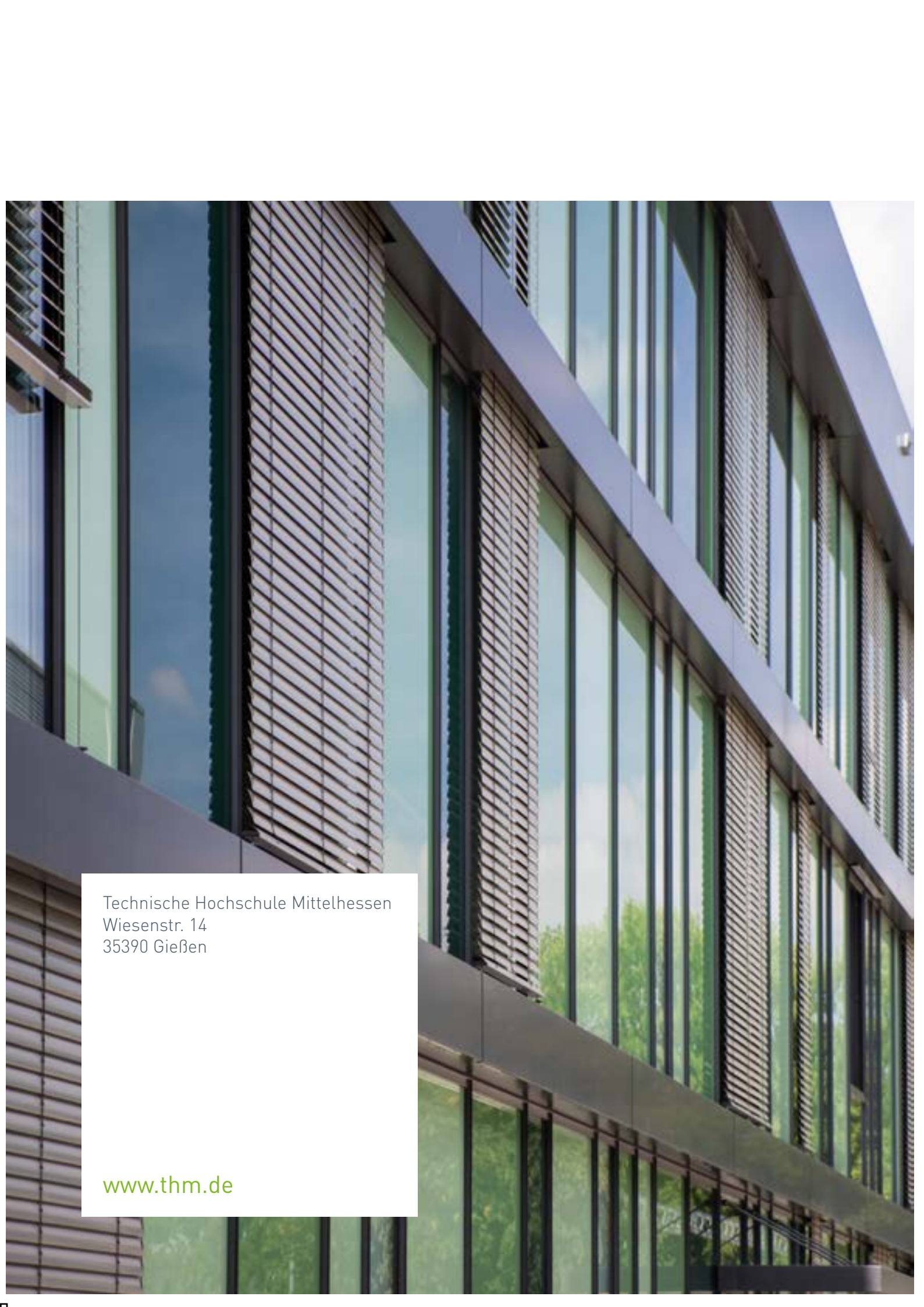
$$\vartheta_1(x, t) = \vartheta_2(x, t) = \vartheta_A \quad (78)$$

Da wir jedoch $\vartheta_{Lade} > \vartheta_A$ fordern, gibt es keine klassische Lösung. Da jedoch die Bedingungen (45) und (46) erfüllt sind, liefert Satz 5, dass eine eindeutige verallgemeinerte Lösung existiert. Diese kann mit Hilfe der Picard Iterierten bestimmt werden.

Literatur

- [1] F. Müller: Approximating the solution of the discharging process in a domestic hot water storage tank, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 27:1 (2021), pp: 141 - 161. DOI: 10.1080/13873954.2021.1887277
- [2] Alberto Bressan: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 20, Oxford University Press, New York, 2000.
- [3] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
- [4] G.B. Folland: *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1995.
- [5] A. Zavala-Rio, R. Santiesteban-Cos: Reliable compartmental models for double-pipe heat exchangers: An analytical study, *Applied Mathematical Modelling* 31 (2007), pp: 1739 - 1752.

- [6] A. Zavala-Rio, R. Santiesteban-Cos: Qualitatively reliable compartmental models for double-pipe heat exchangers, IFAC System, Structure and Control, Oaxaca, Mexico, USA, 8-10 December 2004.
- [7] K. Huhtala, L. Paunonen: Robust Output Regulation of Counter Flow Heat Exchangers, IFAC PapersOnLine 52:2 (2019), pp: 201 - 206.
- [8] M.A. Jaswon, W. Smith: Countercurrent transfer processes in the non-steady state, Proceedings of the Royal Society (1954), pp: 226 - 244.
- [9] M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1964.
- [10] D.D. Gvozdenac: Analytical Solution of Transient Response of Gas-to-Gas Parallel and Counterflow Heat Exchangers, J. Heat Transfer 109:4 (1987), pp: 848 - 855.
- [11] D.D. Gvozdenac: Analytical solution for transient response of counter flow heat exchanger with finite wall capacitance, Heat and Mass Transfer 28 (1993), pp: 351 - 356.
- [12] R. Kress: Linear Integral Equations, 2nd edition, Springer, Berlin, 1999.
- [13] F. Müller, W. Varnhorn: On approximation and numerical solution of Fredholm integral equations of second kind using quasi-interpolation, Applied Mathematics and Computation 217:13, 2011, pp: 6409 - 6416. DOI: 10.1016/j.amc.2011.01.022
- [14] T. Kreuzinger, M. Bitzer, W. Marquardt: Mathematical modelling of a domestic heating system with stratified storage tank, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 14:3 (2008), pp: 231 - 248. DOI: 10.1080/13873950701844907
- [15] W.E. Schiesser: The Numerical Method of Lines. Integration of Partial Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1991.
- [16] A.L. Nash, A. Badithela, N. Jain: Dynamic modelling of a sensible thermal energy storage tank with an immersed coil heat exchanger under three operation modes, Applied Energy 195 (2017), pp: 877 - 889.
- [17] S.V. Patankar: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [18] R. LeVeque: Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [19] K.M. Powell, T.F. Edgar: An adaptive-grid model for dynamic simulation of thermocline thermal energy storage systems, Energy Conservation and Management 76 (2013), pp: 865 - 873.
- [20] M.A. Wagner, T. Meurer, A. Kugi: Trajectory planning for semilinear PDEs modeling a countercurrent heat exchanger, IFAC Proceedings Volume 43:14 (2010), pp: 593 - 598. DOI: 10.3182/20100901-3-IT-2016.00269

A photograph of a modern building facade featuring large glass windows and metal panels. The windows reflect the sky and surrounding greenery. The building has a clean, industrial aesthetic with dark frames and light-colored metal accents.

Technische Hochschule Mittelhessen
Wiesenstr. 14
35390 Gießen

www.thm.de