

Olaf Strelow

Allgemeines Modell zur stationären und dynamischen
Simulation der thermischen Eigenschaften von Gebäu-
den

THM-Hochschulschriften Band 25

Olaf Strelow

Allgemeines Modell zur stationären und dynamischen Simulation der thermischen Eigenschaften von Gebäuden

THM-Hochschulschriften Band 25

THM-Hochschulschriften Band 25

© 2023 Olaf Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Die Hochschulschriften sind online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Mathematische Grundlagen der Modellierung	6
2.1	Die Exponentialmatrix	6
2.2	Die Reversmatrix	9
3	Allgemeines Modell zur stationären Simulation von Gebäuden	11
3.1	Modell für Konduktion	12
3.2	Modell für Konvektion	15
3.3	Modell für Quellen und Senken	16
3.4	Simulation des stationären Verhaltens	16
4	Allgemeines Modell zur dynamischen Simulation von Gebäuden	19
4.1	Beschreibendes Differenzialgleichungssystem für ein Gebäude	20
4.2	Mathematische Beschreibung zyklischer Umgebungseinflüsse	23
4.3	Dynamisches Modell für zyklische Umgebungseinflüsse	24
4.4	Gebäudemodell mit zyklischen Umgebungsbedingungen	26
4.5	Simulation des dynamischen Verhaltens	27
5	Beispiele	29
5.1	Stationäre Simulation	29
5.2	Dynamische Simulation	30
6	Zusammenfassung und Ausblick	37
7	Formelzeichen	38
7.1	Skalare	38
7.2	Vektoren	38
7.3	Matrizen	39
7.4	Indizes	39
8	Literatur	40

Allgemeines Modell zur stationären und dynamischen Simulation der thermischen Eigenschaften von Gebäuden

Prof. Dr.-Ing. O. Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen - FB Maschinenbau & Energietechnik
Institut für Thermodynamik, Energieverfahrenstechnik u. Systemanalyse

St. Tönis, 11.03.2023

1 Einleitung

Das zivilisatorische Niveau von Gesellschaften wird in der Gestaltung, der Funktion und der Ausstattung von Bauwerken über lange Zeiträume hinweg überliefert. Gebäude verkörpern das gesellschaftliche Bewusstsein während ihrer Entstehung, indem sie bauphysikalisches Wissen und technisch-ökonomische Möglichkeiten repräsentieren. Gegenwärtig orientiert die Bauphysik auf wirtschaftlich/ökologisch optimalen Einsatz von natürlichen und technischen Ressourcen. Hervorzuhebende Kriterien sind zunächst Gewinnung, Transport und Verarbeitung der Baumaterialien, später die Ressourcen für die bestimmungsgemäße Nutzung sowie nach dem Nutzungsende die sachgerechte Entsorgung.

Der hauptsächliche Anspruch an Gebäude ist die Gewährleistung eines vorgegebenen inneren Klimas bei wechselnden äußeren Witterungsbedingungen. Gegenwärtig sind thermische Eigenschaften von Gebäuden energiewirtschaftlich hoch interessant. Im vorliegenden Artikel wird ein parametrierbares mathematisches Modell zur Simulation und Analyse von thermischen Gebäudeeigenschaften vorgestellt und an Beispielen erläutert.

Für die Projektierung eines Gebäudes ist die Ermittlung des Heizbedarfes eine wichtige Information. Traditionell liegen dieser Ermittlung beobachtete Extrembedingungen zugrunde, so dass sämtliche andere Bedingungen für ein Gebäude „abgedeckt“ sind. Soweit die stationäre Betrachtung. Bei dynamischer Betrachtung stellen sich kurzzeitige extreme Bedingungen als kaum dramatisch heraus, weil z.B. ein kurzzeitiger Temperatursturz durch Speichereffekte des Gebäudes kompensiert wird und somit fast unbemerkt bleibt.

Die Untersuchung dynamischer thermischer Eigenschaften von Gebäuden ist nur per Computer möglich. Zur Verfügung stehende Software ist meist sehr komplex und bietet viele Möglichkeiten zur Eingabe von einflussstarken und auch unbedeutenden Parametern. Eine solche Black-Box hemmt den Erkenntnisgewinn, bei welcher der Nutzer zeitaufwendige „Spielchen“ (wissenschaftlich korrekt: Parameterstudien) durchführt, um sich ein „Gefühl“ zu verschaffen. D.h. wesentliche Kausalitäten sind vom „Auge“ des Nutzers schwierig erkennbar oder bleiben gänzlich verborgen.

Im vorliegenden Artikel wird eine modular aufgebaute mathematische Methode vorgestellt, welche die Erstellung eines Programms zur Gebäudesimulation mit Standardsoftware gestattet. Dies erfordert ingenieurtechnische Kenntnisse für Tabellenkalkulation. Die mathematischen Ansätze sind innovativ und erfordern keine Iterationen. Geduldsraubende Rechenzeiten entstehen nicht. Besonders wichtig sind Eingriffsmöglichkeiten für zielgerichtete Analysen von beobachteten Phänomenen.

Die mathematische Simulation erfolgt stets über die Lösung von Systemen algebraischer Gleichungen oder Differenzialgleichungen. Die Formulierung der entsprechenden Gleichungen ist der entscheidende Ausgangspunkt. An diesem Punkt kommen bei Differenzialgleichungen besonders häufig traditionelle Glaubenssätze ins Spiel. Beispielsweise sollten implizite Lösungsverfahren den expliziten vorgezogen werden. Des Weiteren geschieht auch die Wahl der Zeitschrittweite vor dem Hintergrund des EULER-Verfahrens, welches nur die erste Ableitung berücksichtigt. Dagegen ermöglicht die Berücksichtigung höherer Ableitungen (u.U. > 20) beliebige Zeitschrittweiten ohne Genauigkeitsverlust.

Bei dynamischen Simulationen ist die Bestimmung exakter Anfangsbedingungen meist problematisch, welche naturgemäß immer das Resultat von vorangegangenen dynamischen Prozessperioden mit ebenfalls unbekanntem Anfangsbedingungen sind. Diesem Effekt wird besonders bei zyklischen Prozessen mit einer „Einlaufsimulation“ vor der eigentlichen Simulation begegnet. Diese Präsimulation ist eine mehr oder weniger gute Näherung, welche gemäß vorliegendem Artikel völlig unnötig ist /6/.

Nachfolgend wird ein Simulationsverfahren vorgestellt, welches gebäude- und witterungsbeschreibende Differenzialgleichungssysteme für zyklische Zeitperioden (z.B. regionale Referenzjahre) ohne Iteration bei beliebiger Zeitschrittweite schnell und numerisch exakt löst. Selbst Systeme mit 500 - 1000 Differenzialgleichungen stellen kein Problem dar.

2 Mathematische Grundlagen der Modellierung

Modelle zur Simulation des Verhaltens komplexer technischer Systeme basieren bekanntlich immer auf der Lösung umfangreicher Gleichungssysteme. Für die Lösung der Modellgleichungen ist die Nutzung von Computern aktueller Stand. Nach wie vor aufwendig ist die Erstellung von adäquaten mathematischen Modellen für technische Objekte, da dies stets mehrere Wissensgebiete tangiert. Ausgangspunkt sind Kenntnisse der physikalischen, chemischen, technischen und wirtschaftlichen Zusammenhänge des betrachteten Systems. Des Weiteren erfordert die Modellierung mathematische Kenntnisse und deren Umsetzung auf einen modernen Rechner. Diese Fülle von Kenntnissen erweckt fast den Eindruck einer unlösbaren Aufgabe. Dies ist zum Glück nicht der Fall!

Jede größere Aufgabe zur Modellierung eines Systems ist derart zu strukturieren, so dass sie aus lösbarer Teilaufgaben besteht. Von entscheidender Bedeutung ist hierbei, dass die Modelle nicht nur Einzelfälle abbilden. Ein brauchbares mathematisches Modell sollte sich qualitativ und quantitativ beliebig skalieren lassen. Für die Skalierbarkeit sind Modelle auf Grundlage thermischer Netzwerke hervorragend geeignet /9/. Es ist möglich, thermische Netzwerke ausschließlich auf Basis linearer Modelle mit Matrizen und Vektoren aufzubauen /6/, /10/. Dem „Vater“ des Computers Konrad Zuse wird die Aussage „Das Matrizenkalkül ist das kleine Einmaleins des digitalen Rechenautomaten“ zugeschrieben /5/.

Der vorliegende Artikel baut auf den Grundlagen der Matrizenrechnung auf. Dies sind im Einzelnen Addition, Multiplikation, Transponieren und Invertieren von Matrizen. Im Folgenden werden zwei weiterführende Matrizenoperationen mit interessanten Anwendungsmöglichkeiten dargestellt.

2.1 Die Exponentialmatrix

Bei der Lösung linearer Differenzialgleichungen kommt der Exponentialmatrix eine große Bedeutung zu. Sie ermöglicht es, Lösungen mit analytischer Genauigkeit bei beliebiger Zeitschrittweite zu generieren. Gemäß der Methode des Zustandsraumes /1/, /2/, /3/, /4 / existiert für die beschreibenden Zustandsgrößen eines technischen Systems stets ein Modell mit linearen oder linearisierten Differenzialgleichungen. Ein solches Differenzialgleichungssystem stellt den Zusammenhang zwischen erster Ableitung der Zustandsgrößen $\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{Z}}$, den Eingangsgrößen $\underline{\mathbf{X}}$ und den Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}$ mit der Modellmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ her

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$
$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{X}}$$

Zur Lösung dieses Differenzialgleichungssystems ist ein Anfangszustand $\underline{\mathbf{Z}}_0$ erforderlich. Das Differenzialgleichungssystem (1) impliziert einen weiteren Zustand $\underline{\mathbf{Z}}_s$, welcher für die Lösung hilfreich ist. Für stabile Systeme ist dies der stationäre Zustand, welchem das System asymptotisch zustrebt. Bei instabilen Systemen ist dies ein singulärer Zustand, von welchem die Zustandsgrößen ins Unendliche abdriften oder um welchen die Zustandsgrößen identische Zyklen durchlaufen. Für den stationären Zustand $\underline{\mathbf{Z}}_s$ folgt

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}_s = - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{11} & m_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_s = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \underline{\mathbf{X}}$$

Es ist möglich das Differenzialgleichungssystem (1) durch Einführung reduzierter Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{z}}$ zu vereinfachen. Dies erfolgt durch Subtraktion der stationären Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}_s$ von den Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}$. Der stationäre Zustand ist somit Koordinatenursprung der reduzierten Zustandsgrößen

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}_s \quad (3)$$

$$\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{Z}} - \underline{\mathbf{Z}}_s$$

Durch diese Vereinfachung gilt die nachfolgende Differenzialgleichung mit den reduzierten Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{z}}$. Der Eingangsvektor entfällt dabei.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{11} & m_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{z}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\mathbf{z}}$$

Für die n -ten Ableitungen der Modellgleichungen $\underline{\mathbf{z}}^{(n)}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{z}}^{(1)} &= \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\mathbf{z}} \\ \underline{\mathbf{z}}^{(2)} &= \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\mathbf{z}}^{(1)} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^2 \underline{\mathbf{z}} \\ \underline{\mathbf{z}}^{(3)} &= \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\mathbf{z}}^{(2)} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^3 \underline{\mathbf{z}} \\ \underline{\mathbf{z}}^{(4)} &= \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\mathbf{z}}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^4 \underline{\mathbf{z}} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Ausgehend vom reduzierten Zustand $\underline{\mathbf{z}}_0$ an der Stelle $t = 0$ gilt gemäß dem Satz von Taylor

$$\underline{\mathbf{z}}_{\Delta t} = \underline{\mathbf{z}}_0 + \underline{\mathbf{z}}_0^{(1)} \Delta t + \underline{\mathbf{z}}_0^{(2)} \frac{\Delta t^2}{2!} + \underline{\mathbf{z}}_0^{(3)} \frac{\Delta t^3}{3!} + \underline{\mathbf{z}}_0^{(4)} \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \Delta t^i}{i!} \right) \underline{\mathbf{z}}_0 \quad (6)$$

Durch die letzte Zusammenfassung entsteht die Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$ für eine beliebige Zeitschrittweite Δt . Es gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \Delta t^i}{i!} \quad (7)$$

Die Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$ gemäß Gleichung (7) stellt die exakte Lösung des Differenzialgleichungssystems (1) in impliziter Form dar.

Ein alternativer Ansatz nutzt Eigenwerte und Eigenvektoren der Modellmatrix. Dazu ist die Modellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ in die Matrizen ihrer Eigenwerte $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ zu zerlegen. Die Eigenvektoren bilden dabei die Spalten der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$. Es gilt

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (8)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1}$$

Für die n -ten Potenzen der Modellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^n$ nach Gleichung (8) existiert eine interessante Vereinfachung /5/.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^n = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \dots = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}^n \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (9)$$

Diese Vereinfachung verringert den Aufwand für die Entwicklung der Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$ wesentlich. Der Klammerausdruck in den Gleichungen (6) und (10) enthält die Taylorreihe der Exponentialfunktion

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{\mathbf{M}}}^i \Delta t^i}{i!} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}^i \Delta t^i}{i!} \right) \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (10)$$

Da die Matrix der Eigenwerte $\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}$ eine Diagonalmatrix ist, sind lediglich die Elemente der Hauptdiagonalen mit der Exponentialfunktion zu behandeln. Die Rechenzeit wird hierdurch entscheidend verringert!

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}_{\Delta t} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (11)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{e}^{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}} \Delta t}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1}$$

Die Diagonalelemente der exponierten Eigenwertmatrix $\underline{\underline{\mathbf{e}^{\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}} \Delta t}}}$ sind mit analytischen Termen darstellbar. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die Elemente der Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$. Allerdings sind die erhaltenen analytischen Ausdrücke in den meisten Fällen auf Grund ihres Umfangs schwer darstellbar und somit kaum mitteilungs-fähig. Deshalb sollte die numerische Ebene bei großen Matrizen Apriori bevorzugt werden.

Die Lösungsfunktion des Differenzialgleichungssystems (4) mit reduzierten Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{z}}$ lautet in Form einer Matrixgleichung.

$$\underline{\mathbf{z}}_{\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{z}}_0 \quad (12)$$

Mit den Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}$ gemäß Gleichung (3) folgt die Lösung des Differenzialgleichungssystems in Form einer erweiterten Matrixgleichung

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\Delta t} = \underline{\mathbf{z}}_s + \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{z}}_0 - \underline{\mathbf{z}}_s) \quad (13)$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassung sind weitere Formen der Lösung darstellbar z.B. mit dem Exponentialvektor $\underline{\mathbf{V}}_{\Delta t}$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{z}}_0 + \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \right) \underline{\mathbf{z}}_s = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{z}}_0 + \underline{\mathbf{V}}_{\Delta t} \quad (14)$$

Die Lösungsfunktionen in Form der Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$ gelten für einen Zeitschritt Δt . Diese Lösungsfunktionen weisen eine rekursive Eigenschaft auf. Die Lösungsgleichung

(14) generiert aus jedem (i.a. beliebigen) Zustandsvektor $\underline{\mathbf{Z}}_t$ den folgenden Zustandsvektor $\underline{\mathbf{Z}}_{t+\Delta t}$. Für eine zeitlich kausale Kette gilt

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{Z}}_{\Delta t} &= \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{Z}}_0 - \underline{\mathbf{Z}}_s) \\ \underline{\mathbf{Z}}_{2\Delta t} &= \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{Z}}_{\Delta t} - \underline{\mathbf{Z}}_s) = \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t}^2 (\underline{\mathbf{Z}}_0 - \underline{\mathbf{Z}}_s) \\ \underline{\mathbf{Z}}_{3\Delta t} &= \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{Z}}_{2\Delta t} - \underline{\mathbf{Z}}_s) = \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t}^3 (\underline{\mathbf{Z}}_0 - \underline{\mathbf{Z}}_s) \\ \dots & \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \dots\end{aligned}\tag{15}$$

Hinweis: Die n -te Potenz einer Exponentialmatrix $\underline{\mathbf{P}}_{\Delta t}^n$ für die Schrittweite Δt ergibt eine Exponentialmatrix $\underline{\mathbf{P}}_{n\Delta t}$ für die n -fache Schrittweite $n \Delta t$. Die analytische Genauigkeit der Exponentialmatrix bleibt selbstverständlich erhalten.

2.2 Die Reversmatrix

Zur Ermittlung der Exponentialmatrix existiert eine Umkehrung /10/. Diese Möglichkeit wird im vorliegenden Kontext nicht verwendet. Trotzdem soll dieses Verfahren kurze Erwähnung finden. Es ist eine pragmatische Möglichkeit der Auswertung von gemessenen Daten per Zeitreihenanalyse auf Grundlage der linearen Regression

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}_{i+1} &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{Z}}_{i+1} &= \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_i + \underline{\mathbf{V}}\end{aligned}\tag{16}$$

Mit homogenen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & v_1 \\ p_{21} & p_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ 1 \end{bmatrix}_i \\ \underline{\mathbf{Z}}_{i+1} &= \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_i\end{aligned}\tag{17}$$

Eine Folge von i.a. beliebigen Eingangsvektoren bildet die Spalten der Eingangsmatrix $\underline{\mathbf{X}}$. Im vorliegenden Fall besteht zwischen den Eingangsvektoren ausgehend vom Zustand $\underline{\mathbf{Z}}_0$ ein kausaler Zusammenhang gemäß der rekursiven Form $\underline{\mathbf{Z}}_{i+1} = \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_i$. Der zeitliche Abstand zwischen den Zustandsvektoren $\underline{\mathbf{Z}}_i$ und $\underline{\mathbf{Z}}_{i+1}$ beträgt Δt

$$\underline{\mathbf{X}} = [\underline{\mathbf{Z}}_0 \quad \underline{\mathbf{Z}}_1 \quad \underline{\mathbf{Z}}_2 \quad \dots \quad \underline{\mathbf{Z}}_n]\tag{18}$$

Entsprechend bilden die Ausgangsvektoren die Spalten der Ausgangsmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$. Es gilt

$$\underline{\mathbf{Y}} = [\underline{\mathbf{Z}}_1 \quad \underline{\mathbf{Z}}_2 \quad \underline{\mathbf{Z}}_3 \quad \dots \quad \underline{\mathbf{Z}}_{n+1}]\tag{19}$$

Zu beachten ist die Bedingung, dass die Anzahl der Messdaten n stets größer als die Anzahl der Zustandsgrößen z ist ($n > z$). Somit folgt ein überbestimmtes Gleichungssystem

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{X}}\tag{20}$$

Überbestimmte Gleichungssysteme sind nicht eindeutig und lassen widersprüchliche Lösungen zu. Die Methode der Minimalen Fehlerquadratsumme ermöglicht den optimalen Ausgleich zwischen widersprüchlichen Lösungen. Gemäß der Methode der Minimalen Fehlerquadratsumme folgt ein bestimmtes Gleichungssystem

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{Y}}}\underline{\underline{\mathbf{X}}}^T (\underline{\underline{\mathbf{X}}}\underline{\underline{\mathbf{X}}}^T)^{-1}$$

Die erhaltene Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$ ist in die Eigenwertmatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ und die Matrix der Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ zu zerlegen.

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}\underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (21)$$

Durch Logarithmieren der einzelnen Eigenwerte l_i der Diagonalmatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ folgen die mit der Zeitschrittweite Δt multiplizierten Eigenwerte $\ln l_i = \lambda_i \Delta t$ der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_R$ für das beschreibende Differenzialgleichungssystem der Zeitreihen $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}$. Hierfür ist u.Ü. die Anwendung der Rechenregeln für komplexe Zahlen erforderlich. Damit ist die Reversmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_R$ als Umkehrung der Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$ zu sehen

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_R = \underline{\underline{\mathbf{S}}}\underline{\underline{\Lambda}}\underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (22)$$

Hinweis: Die Ermittlung der Reversmatrix erfordert bestimmte Eigenschaften der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_R$ z.B. unterschiedliche Eigenwerte. Spezielle Lösungen für die vielen Sonderfälle werden an dieser Stelle ausgespart.

3 Allgemeines Modell zur stationären Simulation von Gebäuden

Für die Simulation ist es günstig ein Gebäude als komplexes Netzwerk von thermischen Knoten aufzufassen /6/, /9/. Die Allgemeine Netztheorie ermöglicht eine effektive Erstellung von mathematischen Modellen für technische Netze. Dieses Vorgehen basiert auf der linearen Algebra und ist mit der Methode des Zustandsraums kompatibel /4/. Vorteil dieses Vorgehens ist geringerer Aufwand mit wenig Möglichkeiten für Fehler. Weiterhin besteht hohe numerische Genauigkeit und Lösungsstabilität. Diesen Eigenschaften liegt die konsequente Anwendung des Matrizenkalküls zugrunde, wodurch der Aufwand für die Programmierung nicht vom Umfang der Aufgabenstellung abhängt.

Thermische Knoten im Sinne der Netztheorie sind energetisch bilanzierbare Volumenelemente von Gebäuden. Diese Volumenelemente weisen konstante Stoffwerte auf. Innerhalb eines Knotens sind Temperaturen räumlich konstant.

Ein stationäres mathematisches Modell eines Gebäudes beschreibt physikalische Zusammenhänge grundsätzlich mit zeitlich konstanten Größen. Dies gilt auch für Strahlungseinflüsse. Beispielsweise liegen für Auslegungen zeitlich konstante Einflussgrößen in Form von Mittel- oder Extremwerten der inneren und äußeren thermischen Bedingungen vor.

Das Wesen der Modellbildung per Netztheorie wird am Beispiel eines in Abbildung 1 dargestellten stark vereinfachten Tiny-Hauses demonstriert. Gründe der Darstellbarkeit erzwingen diese Vereinfachung. Selbstverständlich ist es möglich komplexe Gebäude mit vielen Räumen, entsprechend vielen Zwischenwänden und zahlreichen Lüftungskanälen völlig analog zu behandeln.

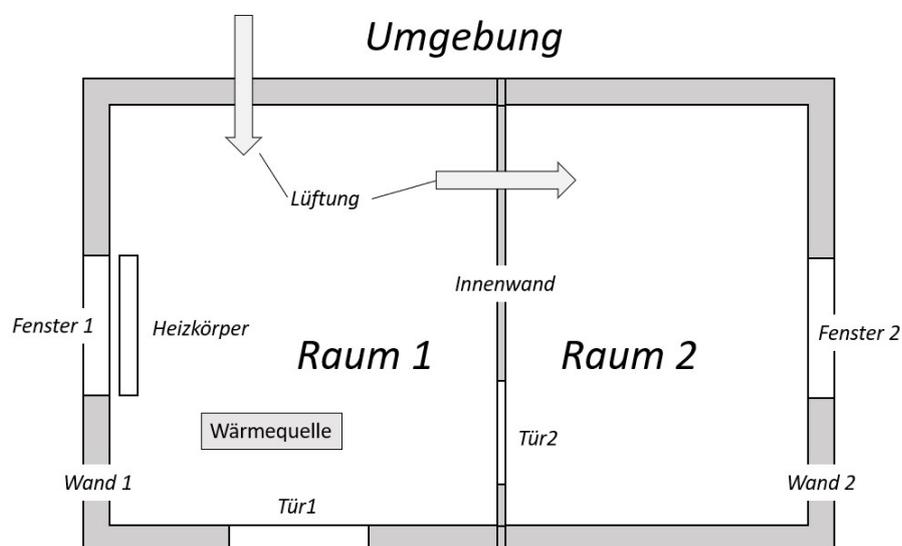


Abbildung 1: Grundriss eines Tiny-Hauses mit zwei Räumen

Ein Gebäude unterliegt inneren und äußeren thermischen Wechselwirkungen. Durch Heizung wird einem Gebäude thermische Energie zugeführt, welche in Form konvektiver und konduktiver Energieströme simultan in die Umgebung abfließen. Bei Kühlung eines Gebäudes fließen konvektive und konduktive Energieströme in umgekehrter Richtung. Die

Konduktion umfasst infolge von unterschiedlichen Temperaturen verursachte Wärmeströme durch feste Materialien. Die Konvektion umfasst Enthalpieströme durch Luftwechsel. Des Weiteren existieren in einem Gebäude thermische Quellen und Senken mit konstanter Leistung (z.B. Abwärme elektrischer Geräte oder Kühlaggregate).

3.1 Modell für Konduktion

Die physikalische Eigenschaft thermischer Knoten ist die Innere Energie mit der zustandsbeschreibenden Variablen Temperatur und den Konstanten Masse sowie spezifische Wärmekapazität. Bestehen zwischen Knoten Temperaturunterschiede verursachen diese konduktive Wärmeströme. Der mathematische Zusammenhang zwischen Temperaturen und Wärmeströmen ist durch zwei leicht parametrierbare Matrizen in allgemeiner Form darstellbar, der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ und der Leitwertmatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$.

Das in Abbildung 1 dargestellte Gebäude besteht aus zwei Räumen mit einer Außentür und zwei Fenstern. Über einen Heizkörper wird dem Raum 1 Wärme zugeführt. Fußböden und Raumdecken bleiben unberücksichtigt, um den Modellumfang im Rahmen der Darstellbarkeit zu halten. Das System "Gebäude" weist somit vier thermische Knoten mit jeweils einer zustandsbeschreibenden Temperatur auf. Die Temperaturen der $k = 4$ Knoten bilden den Zustandsvektor $\underline{\mathbf{T}}$ des Systems.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_h \\ T_1 \\ T_2 \\ T_u \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots \text{ Heizkörper} \\ \dots \text{ Raum 1} \\ \dots \text{ Raum 2} \\ \dots \text{ Umgebung} \end{array} \quad (23)$$

Zwischen den $k = 4$ Knoten existieren $l = 7$ thermische Kopplungen in Form konduktiver Wärmeströme, d.h. den Prozessgrößen. Diese Wärmeströme bilden den prozessbeschreibenden Vektor der internen Wärmeströme $\underline{\dot{\mathbf{q}}}$, welche die Knoten untereinander innerhalb des Systems übertragen. Die Elemente dieses Vektors sind im Einzelnen

$$\underline{\dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots \text{ Heizung} - \text{Raum 1} \quad (\text{Oberfläche des Heizkörpers}) \\ \dots \text{ Raum 1} - \text{Raum 2} \quad (\text{Innenwand und Tür 2}) \\ \dots \text{ Raum 1} - \text{Umgebung} \quad (\text{Wand 1}) \\ \dots \text{ Raum 1} - \text{Umgebung} \quad (\text{Fenster 1}) \\ \dots \text{ Raum 1} - \text{Umgebung} \quad (\text{Tür 1}) \\ \dots \text{ Raum 2} - \text{Umgebung} \quad (\text{Wand 2}) \\ \dots \text{ Raum 2} - \text{Umgebung} \quad (\text{Fenster 2}) \end{array} \quad (24)$$

Die Beschreibung des Systems „Gebäude“ erfordert einen weiteren Vektor für die externen Wärmeströme $\underline{\dot{\mathbf{Q}}^{ea}}$. Die externen Wärmeströme treten über die Grenze des Systems in bestimmte Knoten ein bzw. aus. Für den Vektor der externen Wärmeströme $\underline{\dot{\mathbf{Q}}^{ea}}$ gilt

$$\underline{\dot{\mathbf{Q}}^{ea}} = \begin{bmatrix} \dot{Q}^e \\ 0 \\ 0 \\ \dot{Q}^a \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots \text{ Wärmezufuhr des Heizkörpers} \\ \dots \text{ Raum 1} \\ \dots \text{ Raum 2} \\ \dots \text{ Wärmeabgabe der Umgebung} \end{array} \quad (25)$$

Die internen und externen Wärmeströme sind Elemente der Energiebilanzen um die einzelnen Knoten. Der mathematische Zusammenhang zwischen internem Wärmestromvektor $\underline{\dot{q}}$ und externem Wärmestromvektor $\underline{\dot{Q}}$ wird über die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ hergestellt. Die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ weist k Zeilen und l Spalten auf. Jede Zeile der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ steht für einen Knoten, jede Spalte für einen konduktiven Wärmestrom zwischen zwei Knoten. Die Ordinalzahlen der Knoten stimmen mit der Zeilennummer überein. Analog stimmen die Ordinalzahlen der internen Ströme mit der Spaltennummer überein. In jeder Spalte s weist der Wert „-1“ in der i -ten Zeile den Knoten i als Quelle und der Wert „+1“ in der j -ten Zeile den Knoten j als Senke des s -ten konduktiven Wärmestroms aus. Für das Tiny-Haus gemäß Abbildung 1 gilt

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Die stationären Bilanzen erfolgen um jeden Knoten des Systems „Gebäude“ mit einer Matrixgleichung. Gemäß dieser Matrixgleichung wird zum Produkt aus Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ und Vektor der internen Wärmeströme $\underline{\dot{q}}$ der Vektor externen Wärmeströme $\underline{\dot{Q}}^{ea}$ addiert und diese Summe Null $\underline{0}$ gesetzt. Es gilt der thermische Knotensatz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}^e \\ 0 \\ 0 \\ \dot{Q}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{\dot{Q}}^{ea} = \underline{0}$$

Diese Matrixgleichung (27) stellt den Zusammengang zwischen inneren konduktiven und äußeren zu- bzw. abgeführten thermischen Energieströmen des Systems „Gebäude“ her.

Die Ursache für konduktive Energieströme innerhalb des Systems „Gebäude“ sind die Temperaturdifferenzen zwischen den Knoten. Die treibenden Temperaturdifferenzen $\underline{\Delta T}$ sind als Produkt der transponierten Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}^T$ und den Knotentemperaturen \underline{T} darstellbar. Es gilt der thermische Knotensatz

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \\ \Delta T_4 \\ \Delta T_5 \\ \Delta T_6 \\ \Delta T_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_h \\ T_1 \\ T_2 \\ T_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_h + T_1 \\ -T_1 + T_2 \\ -T_1 + T_u \\ -T_1 + T_u \\ -T_1 + T_u \\ -T_2 + T_u \\ -T_2 + T_u \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\underline{\Delta \mathbf{T}} = \underline{\mathbf{K}}^T \cdot \underline{\mathbf{T}}$$

Jeder durch Temperaturdifferenzen verursachter konvektiver Wärmestrom überwindet einen Wärmewiderstand. Der Wärmestrom \dot{Q} ist das negative Produkt aus treibender Temperaturdifferenz ΔT und thermischem Leitwert L (reziproker thermischer Widerstand). Beim Wärmeübergang gilt $L = \alpha A$ mit Wärmeübergangskoeffizienten α und Wärmeübertragungsfläche A und beim Wärmedurchgang $L = k A$ mit Wärmedurchgangskoeffizienten k und Wärmeübertragungsfläche A . Das thermische Widerstandsgesetz lautet

$$\dot{Q} = -L \Delta T \quad (29)$$

Analog zu Gleichung (29) gilt für sämtliche inneren Wärmeströme $\underline{\dot{Q}}$ das Produkt der thermischen Leitwerte $\underline{\mathbf{L}}$ mit den entsprechenden Temperaturdifferenzen $\underline{\Delta \mathbf{T}}$ in Form einer Matrixgleichung, dem Leitwertgesetz

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \\ \Delta T_4 \\ \Delta T_5 \\ \Delta T_6 \\ \Delta T_7 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{q}}} = -\underline{\mathbf{L}} \underline{\Delta \mathbf{T}}$$

Die schrittweise Zusammenfassung der Gleichungen (27), (8) und (28) ergibt

$$\underline{\dot{\mathbf{Q}}}^{ea} = -\underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{q}}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{L}} \underline{\Delta \mathbf{T}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{M}}_{kd} \underline{\mathbf{T}} \quad (31)$$

Die erhaltene Konduktionsmatrix $\underline{\mathbf{M}}_{kd}$ weist in ausführlicher Schreibweise folgende Struktur auf

$$\underline{\mathbf{M}}_{kd} = \begin{bmatrix} L_1 & -L_1 & 0 & 0 \\ -L_1 & L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 & -L_2 & -L_3 - L_4 - L_5 \\ 0 & -L_2 & L_2 + L_6 + L_7 & -L_6 - L_7 \\ 0 & -L_3 - L_4 - L_5 & -L_6 - L_7 & L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Die Singularität der Modellmatrix $\underline{\mathbf{M}}_{kd}$ ist leicht nachzuvollziehen. Es existieren somit $n = k - 1$ unabhängige Gleichungen d.h. es sind n Zustandsgrößen eindeutig bestimmbar.

3.2 Modell für Konvektion

Das Modell für Konvektion involviert die Zustandsgrößen der Netzknoten sowie die Prozessgrößen der Luftströme. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen wird mit zwei weiteren Matrizen abgebildet, einer Kapazitätsstrommatrix $\underline{\dot{C}}$ und einer Strukturmatrix $\underline{\mathbf{S}}$.

In das Gebäude fließt gemäß Abbildung 1 ein kontinuierlicher Luftstrom zur Realisierung des Luftwechsels. Der Luftstrom strömt zunächst in den Raum 1, „beheizt“ anschließend den Raum 2 und entweicht von diesem zurück in die Umgebung.

Im Modell für Konvektion werden die Parameter eines Luftstroms mit dem Massestrom \dot{m} und der Wärmekapazität c zum Kapazitätsstrom $\dot{C} = \dot{m}c$ zusammengefasst. Die durch die Knoten fließenden Kapazitätsströme füllen die Hauptdiagonale der Kapazitätsstrommatrix $\underline{\dot{C}}$. Ein Luftstrom durch den i -ten Knoten steht in der Kapazitätsstrommatrix an der Position $\dot{C}(i, i)$. Die Strukturmatrix $\underline{\mathbf{S}}$ beschreibt die Wege der Luftströme durch das System "Gebäude". Ein von Null verschiedenes Element der Strukturmatrix $S(i, j) = 1$ bedeutet: In den Knoten i strömt Luft vom Knoten j ein. Im Beispiel gemäß Abbildung 1 tritt Luft von der Umgebung (Knoten 4) in den Raum1 (Knoten 2) ein und strömt von Raum1 in den Raum2 (Knoten 3). D.h. $S(2, 4) = 1$ und $S(3, 2) = 1$.

Für die eintretenden Enthalpieströme $\underline{\dot{H}}^e$ der Knoten folgt somit

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{H}_1^e \\ \dot{H}_2^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{m}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{m}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_1 \\ T_2 \\ T_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{m}cT_u \\ \dot{m}cT_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\underline{\dot{H}}^e = \underline{\dot{C}} \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{T}}$$

Analoges gilt für die austretenden Enthalpieströme $\underline{\dot{H}}^a$ der Knoten. Das Vorhandensein der Einheitsmatrix $\underline{\mathbf{E}}$ ist rein formal.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{H}_1^a \\ \dot{H}_2^a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{m}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{m}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_1 \\ T_2 \\ T_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{m}cT_1 \\ \dot{m}cT_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\underline{\dot{H}}^a = \underline{\dot{C}} \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{T}}$$

In thermischen Knoten wird durch Luftwechsel Energie ein- bzw. ausgehtreten. Das Konvektionsmodell weist diese Energieströme als Differenz der Enthalpieströme zwischen Aus- und Eingang aus /6/. Für die Enthalpiedifferenz $\Delta \underline{\dot{H}} = \underline{\dot{H}}^a - \underline{\dot{H}}^e$ gilt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \dot{H}_1 \\ \Delta \dot{H}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{mc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{mc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} T_h \\ T_1 \\ T_2 \\ T_u \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Delta \dot{H}}} = \underline{\underline{\dot{C}}} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right) \underline{\underline{\mathbf{T}}} \quad (35)$$

Durch Ausmultiplizieren der letzten Gleichung (35) entsteht aus Kapazitätsstrommatrix $\underline{\underline{\dot{C}}}$, Strukturmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ und Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ die Konvektionsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{kv}$. Die Konvektionsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{kv}$ lautet nach der Zusammenfassung

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{kv} = \underline{\underline{\dot{C}}} (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{mc} & 0 & -\mathbf{mc} \\ 0 & -\mathbf{mc} & \mathbf{mc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Die Konvektionsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{kv}$ ist zwar singulär, trotzdem wichtiger ergänzender Bestandteil des Gesamtmodells.

3.3 Modell für Quellen und Senken

Thermische Quellen und Senken in Gebäuden sind durch konstante Energieleistungen charakterisiert, welche nicht ursächlich von Temperaturdifferenzen oder Massetransporten abhängen. Derartige Quellen oder Senken sind z.B. Kühlgeräte, Abwärme von elektrischen Geräten, Personen inkl. deren Lebensführung sowie zeitweise Sonneneinstrahlung durch Fenster

Im stationären Fall bewirken Quellen und Senken konstante Wärmeströme, welche einem Knoten in direkter Weise zu- oder abgeführt werden. Das Modell für Senken und Quellen besteht aus einem Vektor $\underline{\underline{\dot{Q}}}^{qs}$ mit den zu- oder abgeführten Energieströme, z.B. Raum 1 mit Eintrag von Abwärme eines elektrischen Gerätes (Knoten 2)

$$\underline{\underline{\dot{Q}}}^{qs} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{Q}^q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Das Modell für Quellen und Senken ist ebenfalls ergänzendes Element für das Gesamtmodell.

3.4 Simulation des stationären Verhaltens

Das Gesamtmodell für die stationäre Simulation eines Gebäudes entsteht durch Überlagerung der vorangestellten Modelle für Konduktion, Konvektion und Quellen/Senken, in Form der Gleichungen (32), (36), (37). Auf der linken Seite der Matrixgleichung stehen externe

über die Systemgrenze des Gebäudes ein- und ausgetragene thermische Energieströme, auf der rechten Seite stehen interne Wärme- und Enthalpieströme. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{Q}^e \\ 0 \\ 0 \\ \dot{Q}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{Q}^q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 & -L_1 & 0 & 0 \\ -L_1 & mc + L_{1-5} & -L_2 & -mc - L_{3,4,5} \\ 0 & -mc - L_2 & mc + L_{2,6,7} & -L_{6,7} \\ 0 & -L_{3,4,5} & -L_{6,7} & L_{3-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_1 \\ T_2 \\ T_u \end{bmatrix} \\
 \underline{\dot{Q}}^{ea} + \underline{\dot{Q}}^{qs} &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{kd} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{kv} \underline{\mathbf{T}}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Für ein Gebäude mit n Knoten existieren $n - 1$ linear unabhängige Gleichungen. Somit sind $n - 1$ Variablen eindeutig bestimmbar. D.h. mit dem Gleichungssystem ist es möglich verschiedene Fragestellungen zu beantworten. Es ist günstig das Gleichungssystem in eine homogene Form zu überführen, bei welcher auf einer Seite der Nullvektor $\underline{\mathbf{0}}$ entsteht. Aufgrund linearer Abhängigkeit kann in der Regel die n -te Gleichung entfallen.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 & -L_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -L_1 & mc + L_{1-5} & -L_2 & -mc - L_{3,4,5} & 0 & -1 \\ 0 & -mc - L_2 & mc + L_{2,6,7} & -L_{6,7} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_1 \\ T_2 \\ T_u \\ \dot{Q}^e \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix} \\
 \underline{\mathbf{0}} &= \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\mathbf{Z}}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Nun existieren drei Gleichungen mit sechs Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}$ d.h. bei Vorgabe von drei Zustandsgrößen sind die verbleibenden Größen berechenbar. Analog zum Umstellen von Gleichungen ermöglicht das Gleichungssystem durch Spaltentausch sowie entsprechendem Tausch der jeweiligen Variablen verschiedene Modifikationen. Beispielweise sind Temperatur T_1 und Wärmeeintrag \dot{Q}^q in den Raum1 sowie die Umgebungstemperatur T_u bekannt und dagegen die Oberflächentemperatur des Heizkörpers T_h , die Temperatur des Raum2 T_2 und Heizleistung des Gebäudes \dot{Q}^e unbekannt. Der Vektor der Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}$ wird in den unbekanntem Teil $\underline{\mathbf{Z}}_U$ und den bekannten, vorgegebenen Teil $\underline{\mathbf{Z}}_V$ gespalten. Analog erfolgt die Spaltung der Modellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ in den Teil für die Unbekannten $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_U$ und den Teil der Vorgaben $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_V$. Nach Umstellung und erforderlichem Wechsel der Vorzeichen gilt

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} L_1 & 0 & -1 \\ -L_1 & -L_2 & 0 \\ 0 & mc + L_{2,6,7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 0 \\ mc + L_{1-5} & -mc - L_{3-5} & -1 \\ -mc - L_2 & -L_{6,7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_u \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix} \\
 -\underline{\underline{\mathbf{M}}}_U \underline{\mathbf{Z}}_U &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}_V \underline{\mathbf{Z}}_V
 \end{aligned} \tag{40}$$

Für die Lösung gilt

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_h \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 1 \\ L_1 & L_2 & 0 \\ 0 & -mc - L_{2,6,7} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 0 \\ mc + L_{1-5} & -mc - L_{3-5} & -1 \\ -mc - L_2 & -L_{6,7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_u \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix} \\
 \underline{\mathbf{Z}}_U &= -\underline{\underline{\mathbf{M}}}_U^{-1} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_V \underline{\mathbf{Z}}_V
 \end{aligned} \tag{41}$$

Analog können weitere spezielle Lösungen für modifizierte Fragestellungen gefunden werden, sofern die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_U$ nicht singulär ist. Dies wird nachfolgend an Beispielen demonstriert.

4 Allgemeines Modell zur dynamischen Simulation von Gebäuden

Das Modell für die dynamische Simulation eines Gebäudes entsteht durch Erweiterung des stationären Modells. Bekanntlich erfordert ein dynamisches Modell zusätzlich die Kenntnis der Wärmekapazitäten sämtlicher Knoten, um deren thermische Trägheit mathematisch abzubilden. Von entscheidender Bedeutung ist jedoch die adäquate Beschreibung der äußeren Bedingungen.

Gebäude sind ständig einer veränderlichen Umgebungstemperatur sowie einer unterschiedlichen thermischen Einstrahlung ausgesetzt. Die zeitlichen Verläufe dieser Einflüsse variieren in fast unendlicher Mannigfaltigkeit. Wiederholungen von Wetterperioden sind im strengen Sinne unmöglich. Trotzdem existieren innerhalb bestimmter Zeiträume beobachtbare ähnliche und typische Muster der äußeren Einflüsse. Diese Muster gestatten Prognosen innerhalb unscharfer Grenzen. Allerdings klaffen diese Grenzen mit zunehmendem zeitlichem Horizont der Vorhersage weiter auseinander. Für die Simulation der dynamisch-thermischen Eigenschaften von Gebäuden ist diese Unschärfe jedoch unerheblich. Wichtiger ist die Kenntnis der Anfangsbedingungen für den Simulationszeitraum. Aufgrund der dynamischen "Vorgeschichte" des Gebäudes sind die Anfangsbedingungen nicht trivial ermittelbar. Eine pragmatische Möglichkeit ist die geschickte Wahl eines Zeitraumes für die Simulation, bei welchem die witterungsbedingten äußeren Bedingung zu Beginn und am Ende möglichst gleich sind. In diesem Fall liegt näherungsweise ein zyklischer Prozess der äußeren Bedingungen vor, dessen beliebig wählbarer Startpunkt einfach und exakt ermittelbar ist [6].

Für die mathematische Beschreibung zyklischer Prozesse sind Fourier-Reihen hervorragend geeignet. Die beobachteten Wetterdaten bezüglich Temperatur und Strahlung liegen für die Simulation in Form der Fourier-Koeffizienten vor. Nachfolgend werden im Sinne einer vereinfachten Darstellung nur die Temperaturen betrachtet.

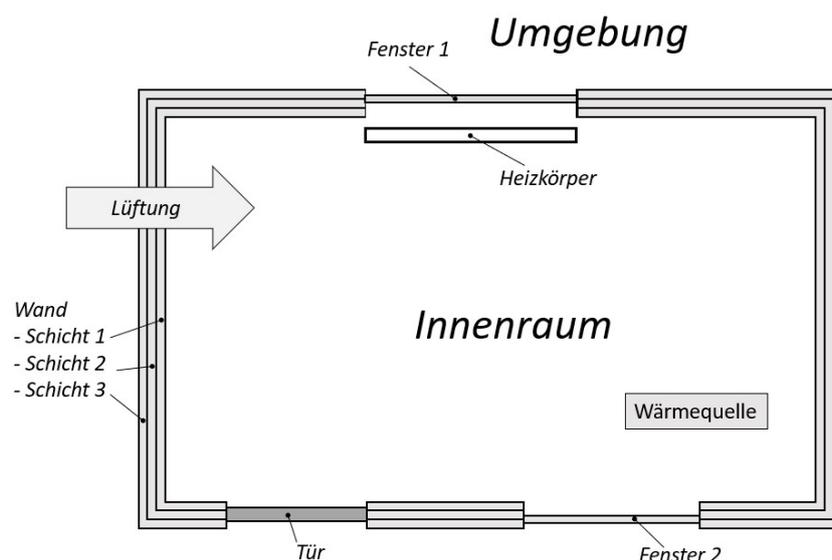


Abbildung 2: Grundriss eines einfachen Tiny-Hauses

Die Abbildung 2 zeigt den Grundriss eines ebenfalls stark vereinfachten Tiny-Hauses. Das

Gebäude weist einen Raum mit einer Tür, zwei Fenstern und einem Gerät mit Abwärme auf. Der Raum wird geheizt und zwangsdurchlüftet. Die nachfolgende Modellentwicklung erfordert ein vereinfachtes Objekt, welches die Allgemeingültigkeit der vorgestellten Modelle in keiner Weise einschränkt.

Ein instationäres Modell für feste Wände basiert i.a. auf der Lösung einer partiellen Differentialgleichung. Alternativ ist es möglich feste Wände näherungsweise mit einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu modellieren. Dazu wird die Wand in fiktive Schichten geteilt. Für jede Schicht ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zu formulieren. Für realitätsnahe Simulationen sind ein bis zwei Differentialgleichungen pro Zentimeter Wandstärke ausreichend. Im Beispiel gemäß Abbildung 2 liegen drei Wandschichten vor.

4.1 Beschreibendes Differentialgleichungssystem für ein Gebäude

Ein dynamisches Modell für ein Gebäude, d.h. ein Netzwerk mit zahlreichen Knoten und ihren Verknüpfungen, basiert auf Knotenbilanzen. Im Gegensatz zu stationären Modellen ist die Summe von energetischen Zu- und Abflüssen der Knoten bei einer instationären Bilanz ungleich Null. Die Differenz zwischen energetischen Zu- und Abflüssen bestimmt die Zustandsänderung der Knoten.

Ein dynamisches Modell ist umfangreicher, da Wände mehrschichtig zu modellieren sind. Das Gebäude gemäß Abbildung 2 wird als System mit sechs thermischen Knoten abgebildet.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_h \\ T_r \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_u \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots \text{ Heizkörper} \\ \dots \text{ Raum} \\ \dots \text{ Wandschicht 1} \\ \dots \text{ Wandschicht 2} \\ \dots \text{ Wandschicht 3} \\ \dots \text{ Umgebung} \end{array} \quad (42)$$

Zwischen diesen Knoten existieren sieben thermische Kopplungen in Form konduktiver Wärmeströme $\underline{\dot{q}}$. Im Einzelnen sind dies

$$\underline{\dot{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{lll} \dots \text{ Heizung} & - & \text{Raum} & \text{(Oberfläche des Heizkörpers)} \\ \dots \text{ Raum} & - & \text{Wandschicht 1} & \text{(Innenfläche des Gebäudes)} \\ \dots \text{ Wandschicht 1} & - & \text{Wandschicht 2} & \\ \dots \text{ Wandschicht 2} & - & \text{Wandschicht 3} & \\ \dots \text{ Wandschicht 3} & - & \text{Umgebung} & \text{(Außenfläche des Gebäudes)} \\ \dots \text{ Raum} & - & \text{Umgebung} & \text{(Tür)} \\ \dots \text{ Raum} & - & \text{Umgebung} & \text{(Fenster)} \end{array} \quad (43)$$

Weiterhin existiert infolge des Luftwechsels ein konvektiver Enthalpiestrom $\underline{\Delta\dot{H}}$. Für die Enthalpiedifferenz zwischen Ein- und Austritt gilt

$$\underline{\Delta \dot{\mathbf{H}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{H}^e - \dot{H}^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \text{Lüftung des Raumes} \quad (44)$$

Die instationären Bilanzen der thermischen Knoten sind mit einer Matrixgleichung darstellbar. Die Matrixgleichung beschreibt die Änderung der Inneren Energie $\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{U}}$ als Differenz von zu- und abgeführten thermischen Energieströmen. Dies geschieht durch Multiplikation der Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ mit den internen konduktiven Energieströmen $\underline{\dot{\mathbf{q}}}$ und Addition der zu- bzw. abfließenden konvektiven Enthalpieströme $\underline{\Delta \dot{\mathbf{H}}}$. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_h \\ U_R \\ U_{w1} \\ U_{w2} \\ U_{w3} \\ U_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{H}^e - \dot{H}^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{q}}} + \underline{\Delta \dot{\mathbf{H}}}$$

Für die konduktiven Wärmeströme gilt das Leitwertgesetz $\underline{\dot{\mathbf{q}}} = -\underline{\mathbf{L}}\underline{\Delta \mathbf{T}}$ völlig analog zum stationären Modell gemäß Gleichung (30). Die Leitwertmatrix $\underline{\mathbf{L}}$ ist für das stationäre und das instationäre Modell identisch. Zusammengefasst gilt

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & -L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & -L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & -L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & -L_5 \\ 0 & L_6 & 0 & 0 & 0 & -L_6 \\ 0 & L_7 & 0 & 0 & 0 & -L_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_R \\ T_{w1} \\ T_{w2} \\ T_{w3} \\ T_u \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{q}}} = -\underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{T}}$$

Für die konvektiven Enthalpieströme trifft die Analogie zum stationären Modell ebenfalls

zu.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta h_R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{m}c & 0 & 0 & 0 & -\dot{m}c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_R \\ T_{w1} \\ T_{w2} \\ T_{w3} \\ T_u \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\underline{\underline{\Delta \dot{H}}} = \underline{\underline{\dot{C}}} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{T}}$$

Den Zusammenhang zwischen Innerer Energie $\underline{\underline{U}}$ der Knoten und ihrer Temperatur $\underline{\underline{T}}$ drückt die Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{C}}$ aus. Die thermische Kapazität $C = mc$ ist das Produkt aus Masse und spezifischer Wärmekapazität. Die Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{C}}$ enthält auf der Hauptdiagonalen $C(i, i)$ die Wärmekapazitäten des jeweiligen Knotens i . Die Knoten von Heizung und Umgebung sind Quellen bzw. Senken mit konstanter konduktiv und konvektiv unbeeinflussbarer Temperatur. Dies wird mit einer gegen unendlich strebenden thermischen Kapazität formuliert.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_h \\ U_r \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r c_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_w c_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_w c_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_w c_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_h \\ T_r \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_u \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{C}} \frac{d}{dt} \underline{\underline{T}}$$

Durch Zusammenfassen der Gleichungen (45), (46), (47) und (48) erfährt das Differenzialgleichungssystem seine vorerst endgültige allgemeine Form

$$\underline{\underline{C}} \frac{d}{dt} \underline{\underline{T}} = - \left(\underline{\underline{K}} \underline{\underline{L}} \underline{\underline{K}}^T + \underline{\underline{\dot{C}}} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}}) \right) \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{\dot{Q}}}^{ea} = - \left(\underline{\underline{M}}_{kd} + \underline{\underline{M}}_{kv} \right) \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{\dot{Q}}}^{qs} \quad (49)$$

Die Struktur des Differenzialgleichungssystems stellt die Modellmatrix $\underline{\underline{M}}_D$ in Gleichung (50) zusammenfassend dar.

$$\underline{\underline{M}}_D = -\underline{\underline{C}}^{-1} \left(\underline{\underline{M}}_{kd} + \underline{\underline{M}}_{kv} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 & 0 & m_{26} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} & m_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

In der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{M}}_D$ des Differenzialgleichungssystems zur dynamischen Simulation entstehen an erster und letzter Position aufgrund der unendlichen Kapazität des Heizkörpers und der Umgebung Nullzeilen. Diese Zeilen entfallen, d.h. die Oberflächentemperatur des Heizkörpers und die Umgebungstemperatur sind zeitlich konstant. Das Differenzialgleichungssystem besteht somit nur noch aus vier relevanten Gleichungen. Die

Spalten der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_D$ für die relevanten Temperaturen $\underline{\mathbf{T}}$ bilden die Temperaturmodellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_T$, während die Spalten der konstanten Temperaturen die Eingangsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E$ für den Eingangsvektor $\underline{\mathbf{T}}^e$ bilden

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_r \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & 0 & 0 \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 \\ 0 & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{21} & m_{26} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & m_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_u \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T \underline{\mathbf{T}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\mathbf{T}}^e$$

Es ist möglich, die Eingangsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E$ mit einer Spalte (rechts) sowie den Vektor $\underline{\mathbf{T}}^e$ entsprechend mit einem Element (unten) zu erweitern um eine interne Wärmequelle \dot{Q}^q einzufügen.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_r \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & 0 & 0 \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 \\ 0 & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{21} & m_{26} & m_{2e} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{56} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_u \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T \underline{\mathbf{T}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\mathbf{T}}^e \quad (52)$$

In der vorliegenden Form besteht der Eingangsvektor $\underline{\mathbf{T}}^e$ aus konstanten Größen. Dies entspricht einem Sprungeingang. Nachfolgend wird die Möglichkeit der Einbindung beliebiger zyklischer Eingangsfunktionen dargestellt.

4.2 Mathematische Beschreibung zyklischer Umgebungseinflüsse

Es ist beobachtbar, dass natürliche Umgebungsbedingungen (Wetter und Einstrahlung) periodische Phasen aufweisen. Mit Fourier-Reihen ist es möglich periodische Temperaturverläufe (oder auch Verläufe der Strahlungsintensität) mathematisch zu beschreiben. Vorab ist die Dauer einer Periode, die Zykluszeit t_z zu bestimmen. Als Kriterium der Periodizität für k Zyklen gilt: $T(t) = T(t + k \cdot t_z)$. Die Temperaturzyklen erfahren über die Kreisfrequenz ω eine Normierung auf den Zyklus der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus. Die folgenden Darstellungen beziehen sich nur auf Temperaturzyklen. Strahlungsphänomene sind analog behandelbar. Es gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_z}$$

$$T(t) = \bar{T} + c_1 \cos \omega t + s_1 \sin \omega t + c_2 \cos 2\omega t + s_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (53)$$

$$T(t) = \bar{T} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t)$$

Die Bestimmung der Fourier-Konstanten erfolgt durch Bearbeitung von Messwerten des Wettergeschehens. Benötigt werden Messreihen der Temperatur an p äquidistanten Zeit-

punkten innerhalb des Zyklus ($T_0, T_{\Delta t}, T_{2\Delta t}, T_{3\Delta t}, \dots, T_{p\Delta t}$), wobei die Anfangs- und Endtemperatur des Zyklus identisch ist $T_0 = T_{p\Delta t}$.

Der erste Fourier-Koeffizient \bar{T} ist die mittlere Temperatur der Zeitreihe. Es gilt:

$$\bar{T} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} T_{i\Delta t} \quad (54)$$

Die weiteren Fourier-Koeffizienten, die Kosinus-Terme c_n und die Sinus-Terme s_n von n -ter Ordnung sind mit den Beziehungen der linearen Regression ermittelbar

$$c_n = \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{p-1} T_{i\Delta t} \cos x_i \quad ; \quad s_n = \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{p-1} T_{i\Delta t} \sin x_i \quad \text{mit} \quad x_i = i n \omega \Delta t \quad (55)$$

Wichtig! Um eindeutige Lösungen zu erhalten, muss analog zur Regression die Anzahl der Messwerte p mindestens der Anzahl der zu bestimmenden Fourier-Koeffizienten $2n + 1$ entsprechen, d.h. $p \geq 2n + 1$. Die Anzahl ermittelter Fourier-Koeffizienten kann u.U. bis zu 1000 betragen.

4.3 Dynamisches Modell für zyklische Umgebungseinflüsse

Das vorgestellte Gebäudemodell gemäß der Matrizengleichungen (49) bzw. (51) impliziert in der dargestellten Form konstante Temperaturen als Sprungeingangsfunktion. Eine übliche Möglichkeit zur Verwendung zyklischer Eingangsfunktionen ist deren Splittung in kleine zeitliche Intervalle mit jeweils konstanter Temperatur. D.h. diese Intervalle nähern die zyklische Eingangsfunktion mit einer Folge zeitlich aneinander gereihten Sprungfunktionen an. Die Genauigkeit der Näherung wird durch die Zeitschrittweite bestimmt. Dies führt entweder zu hoher Rechenzeit oder zu geringer Rechengenauigkeit. Nachfolgend wird ein Verfahren vorgestellt, welches keines dieser Nachteile aufweist.

Es ist möglich zyklische Eingangsfunktionen mit einem linearen Differentialgleichungssystem zu formulieren. Ein derartiges Differentialgleichungssystem wird gemeinsam mit den linearen Differentialgleichungen des Gebäudemodells simultan gelöst, wodurch die mathematisch exakte Einbindung von zyklischen Eingangsfunktionen gewährleistet ist.

Das System linearer Differentialgleichungen bildet mit der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$, dem Sinus-Generator und dem Vektor $\underline{\mathbf{Y}}$ die Sinus- und Cosinusfunktion n -ten Grades ab

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n\omega \\ n\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{Y}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \underline{\mathbf{Y}}$$

Die analytische Lösung der Differentialgleichungen (56) wird effektiv über Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix erhalten. Durch Zerlegung der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ in die Matrix der Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ und die Diagonalmatrix der Eigenwerte $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ gilt

$$\begin{bmatrix} 0 & -n\omega \\ n\omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jn\omega & 0 \\ 0 & -jn\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (57)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1}$$

Die Lösung der Differenzialgleichungen erfolgt durch Exponieren der mit der Zeitschrittweite Δt multiplizierten Eigenwerte λ und dem anschließendem Ausmultiplizieren der Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{e}^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\Delta t}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1}$. Die Exponentialfunktion generiert für imaginäre Argumente Winkelfunktionen. Die exponierte Matrix $\underline{\underline{\mathbf{W}}}$ lautet

$$\begin{bmatrix} \cos n\omega \Delta t & -\sin n\omega \Delta t \\ \sin n\omega \Delta t & \cos n\omega \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{jn\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-jn\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{e}^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\Delta t}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (58)$$

Die erhaltene Lösung weist eine sehr hilfreiche rekursive Eigenschaft auf. Diese beruht auf dem impliziten Wirken der Additionstheoreme von Cosinus- und Sinusfunktion

$$\begin{bmatrix} \cos n\omega (t + \Delta t) \\ \sin n\omega (t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\omega \Delta t & -\sin n\omega \Delta t \\ \sin n\omega \Delta t & \cos n\omega \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\omega t \\ \sin n\omega t \end{bmatrix} \quad \text{mit } \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{t+\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{W}}} \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_t \quad (59)$$

Durch formale Erweiterung des Sinus-Generators nach Gleichung (56) entsteht ein beschreibendes Differentialgleichungssystem für Cosinus- und Sinusfunktionen mit zwei Kreisfrequenzen.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\mathbf{Y}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \underline{\underline{\mathbf{Y}}}$$

Selbstverständlich ist Gleichung (60) beliebig erweiterbar. Die analytische Lösung erfolgt gemäß der vorgestellten Eigenwert-Methode

$$\begin{bmatrix} \cos \omega \Delta t \\ \sin \omega \Delta t \\ \cos 2\omega \Delta t \\ \sin 2\omega \Delta t \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} \cos \omega \Delta t & -\sin \omega \Delta t & 0 & 0 \\ \sin \omega \Delta t & \cos \omega \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\omega \Delta t & -\sin 2\omega \Delta t \\ 0 & 0 & \sin 2\omega \Delta t & \cos 2\omega \Delta t \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{t+\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{W}}} \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{t=0} \quad (61)$$

Die vorstehende Lösung dient der Formulierung zyklischer Temperaturverläufe von Heizung und Umgebung. Die mit Gleichung (55) erhaltenen Fourier-Koeffizienten sind in der Fourier-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ erfasst. Das nachfolgende Fourier-Modell beschreibt die Eingangstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^e$ als periodische Schwingung um deren Mittelwerte $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$.

$$\begin{bmatrix} T_h^e \\ T_u^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_h \\ \bar{T}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^{(h)} & s_1^{(h)} & c_2^{(h)} & s_2^{(h)} \\ c_1^{(u)} & s_1^{(u)} & c_2^{(u)} & s_2^{(u)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ \cos 2\omega t \\ \sin 2\omega t \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\underline{\mathbf{T}}^e = \underline{\underline{\mathbf{T}}} + \underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{Y}}_t$$

Das Fourier-Modell (62) ist für die äußeren Bedingungen eines Gebäudes beliebig erweiterbar und lässt sich unkompliziert in das Gebäudemodell integrieren.

4.4 Gebäudemodell mit zyklischen Umgebungsbedingungen

Das vorgeschlagene Modell zur dynamischen Simulation von Gebäuden unter zyklischen inneren und äußeren Bedingungen involviert drei Teilmodelle. Diese sind das Gebäudemodell, das Fourier-Modell und der Sinus-Generator.

Die Basis bildet das Gebäude Modell nach Gleichung (52), dessen zyklische Eingangstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^e$ mit dem Fourier-Modell von Gleichung (62) eingefügt werden. Durch Einsetzen der entsprechenden Gleichungen folgt

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T \underline{\mathbf{T}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{Y}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\underline{\mathbf{T}}} \quad (63)$$

Gemäß Gleichung (62) und somit auch in Gleichung (63) enthalten die Eingangstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^e$ einen konstanten Teil der Mittelwerte $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ und einen variablen Teil aus Fourier-Koeffizienten $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ multipliziert mit den Cosinus- und Sinus-Funktionen $\underline{\mathbf{Y}}_t$. Der Vektor der Winkelfunktionen $\underline{\mathbf{Y}}_t$ ist Lösung des Differenzialgleichungssystem (60) mit dem Sinus-Generators in Form der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$.

Mit den Aggregationen $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_G = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\underline{\mathbf{F}}}$ und $\underline{\mathbf{X}}^* = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\underline{\mathbf{T}}}$ ist Gleichung (63) zu vereinfachen und zusammen mit Gleichung (60) in die allgemeine Form des Gebäudemodells einzufügen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}} \\ \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_G \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{G}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}} \\ \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}^* \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{Z}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{X}}$$

Die Lösung des Differenzialgleichungssystem erfolgt durch Exponieren der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ für die Zeitschrittweite Δt gemäß Gleichung (10)

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_T & \underline{\underline{\mathbf{P}}}_G \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{W}}} \end{bmatrix}_{\Delta t} = \exp \left(- \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_G \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{G}}} \end{bmatrix} \Delta t \right) \quad (65)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} = \exp \left(- \underline{\underline{\mathbf{M}}} \Delta t \right)$$

Zur Lösung des Differenzialgleichungssystems ist die Ermittlung des stationären Punktes $\underline{\mathbf{Z}}_s$ erforderlich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}} \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}_s &= - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}}_T & \underline{\mathbf{M}}_G \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{G}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}^* \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{Z}}_s &= -\underline{\mathbf{M}}^{-1} \underline{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (66)$$

Das Modell zur Simulation des dynamischen Verhaltens von Gebäuden mit zyklischer Eingangsfunktion weist die nachfolgende allgemeine Form auf. Geometrisch beschreiben die Zustandsgrößen im Zustandsraum eine räumliche Bahn um den stationären Punkt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}} \\ \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{t+\Delta t} &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_T & \underline{\mathbf{P}}_G \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix}_{\Delta t} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}} \\ \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_T & \underline{\mathbf{P}}_G \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix}_{\Delta t} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_s \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{Z}}_{t+\Delta t} &= \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_t + (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t}) \underline{\mathbf{Z}}_s \end{aligned} \quad (67)$$

Die Lösungsgleichung (67) simuliert dynamische Eigenschaften von Gebäuden in rekursiver Form, mit analytischer Genauigkeit. Der Startzustand ist beliebig. Ebenso die Zeitschrittweite Δt .

4.5 Simulation des dynamischen Verhaltens

Im Falle eines zyklischen Prozesses verlaufen die Zustandsgrößen auf einer geschlossenen Trajektorie. Nach Ablauf einer Zykluszeit t_z gilt definitionsgemäß die Gleichheit der Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}_{t_z} = \underline{\mathbf{Z}}_0$ und auch sämtlicher Ableitungen. Ein zyklischer Prozess weist weder einen Anfangs- noch ein Endzustand auf. Für die Simulation eines zyklischen Prozesses ist ein Einsprungspunkt erforderlich, welcher nach Ablauf der Zykluszeit wieder erreicht wird. Die exakte Bestimmung eines Einsprungpunktes ist iterationslos und mit analytischer Genauigkeit bestimmbar.

Für ein Gebäude gilt für einen Zyklus gemäß Gleichung (67)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_{t_z} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{t_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_T & \underline{\mathbf{P}}_G \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix}_{t_z} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_0 \\ \underline{\mathbf{Y}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_T & \underline{\mathbf{P}}_G \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix}_{t_z} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_s \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{Z}}_{t_z} &= \underline{\mathbf{P}}_{t_z} \underline{\mathbf{Z}}_0 + (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_z}) \underline{\mathbf{Z}}_s \end{aligned} \quad (68)$$

Es ist leicht zu sehen, dass nur die obere Matrizengleichung brauchbare Resultate liefert. Für diese Zeile gilt

$$\underline{\mathbf{T}}_0 = \underline{\mathbf{P}}_T \underline{\mathbf{T}}_0 + \underline{\mathbf{P}}_G \underline{\mathbf{Y}}_0 + (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_T) \underline{\mathbf{T}}_s \quad (69)$$

Der Zustandsvektor $\underline{\mathbf{T}}_0$ ist eindeutig bestimmbar, indem die obere Matrixgleichung nach $\underline{\mathbf{T}}_0$ umgestellt wird. Der Zustand $\underline{\mathbf{T}}_0$ stellt den Einsprungs- und Endpunkt für die anschließende Simulation dar.

$$\underline{\mathbf{T}}_0 = \underline{\mathbf{T}}_s + \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_T \right)^{-1} \underline{\mathbf{P}}_G \underline{\mathbf{Y}}_0 \quad (70)$$

Für den Anfangsvektor der Winkelfunktionen $\underline{\mathbf{Y}}_0$ gilt

$$\underline{\mathbf{Y}}_0 = \begin{bmatrix} \sin 0 \\ \cos 0 \\ \sin 0 \\ \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Für die Simulation gilt Gleichung (67). Es ist günstig für die Ermittlung der Zeitschrittweite die Zykluszeit durch eine natürliche Zahl z zu teilen $\Delta t = \frac{t_z}{z}$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Z}}_{\Delta t} &= \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{Z}}_0 - \underline{\mathbf{Z}}_s) &= \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_0 &+ \underline{\mathbf{V}}_{\Delta t} \\ \underline{\mathbf{Z}}_{2\Delta t} &= \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{Z}}_{\Delta t} - \underline{\mathbf{Z}}_s) &= \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_{\Delta t} &+ \underline{\mathbf{V}}_{\Delta t} \\ \underline{\mathbf{Z}}_{3\Delta t} &= \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{Z}}_{2\Delta t} - \underline{\mathbf{Z}}_s) &= \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_{2\Delta t} &+ \underline{\mathbf{V}}_{\Delta t} \\ \dots & & & \\ \underline{\mathbf{Z}}_0 &= \underline{\mathbf{Z}}_s + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} (\underline{\mathbf{Z}}_{(z-1)\Delta t} - \underline{\mathbf{Z}}_s) &= \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \underline{\mathbf{Z}}_{(z-1)\Delta t} &+ \underline{\mathbf{V}}_{\Delta t} \end{aligned} \quad (72)$$

mit dem Exponentialvektor $\underline{\mathbf{V}}_{\Delta t}$

$$\underline{\mathbf{V}}_{\Delta t} = \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \right) \underline{\mathbf{Z}}_s = - \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{\Delta t} \right) \underline{\mathbf{M}}^{-1} \underline{\mathbf{X}} \quad (73)$$

Mit den vorstehenden Gleichungen ist die dynamische Simulation von Gebäuden auf die Operation Matrix \times Vektor zurückgeführt. Bei geschickter Programmierung von Gleichung (73) ist die explizite Addition des Vektors $\underline{\mathbf{V}}_{\Delta t}$ nicht erforderlich.

5 Beispiele

5.1 Stationäre Simulation

Die Gleichungen (38), (39), (40) und (41) umfassen das mathematische Modell für das stationäre Verhalten des Tiny-Hauses gemäß der Abbildung 1. Die Lösung dieser Gleichungen erfordert Vorgaben von Parametern. Es existieren drei unabhängige Gleichungen mit sechs Variablen. Somit existieren verschiedene Varianten von vorzugebenen und zu berechnenden Größen. Die Vorgaben des Beispiels sind in nachfolgender Tabelle aufgeführt.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Temperatur Raum1} & T_1 = 20.0 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 \text{Wärmeeintrag in Raum1} & \dot{Q}^q = 0.40 \text{ kW} \\
 \text{Umgebungstemperatur} & T_u = 10.0 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 \text{Lüftungsstrom} & \dot{m}_l = 0.01 \text{ kg s}^{-1} \left(c_l = 1.0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right)
 \end{array} \tag{74}$$

Weiterhin erfordert das Modell die Kenntnis der thermischen Leitwerte von sieben konduktiven Wärmeströmen

$$\begin{array}{ll}
 \text{Heizkörper} & L_1 = 0.020 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 2.0 \text{ m}^2 = 0.04 \frac{\text{kW}}{\text{K}} \\
 \text{Innenwand (inkl. Tür)} & L_2 = 0.010 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 10.0 \text{ m}^2 = 0.10 \frac{\text{kW}}{\text{K}} \\
 \text{Wand1} & L_3 = 0.004 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 20.0 \text{ m}^2 = 0.08 \frac{\text{kW}}{\text{K}} \\
 \text{Fenster1} & L_4 = 0.005 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 2.0 \text{ m}^2 = 0.01 \frac{\text{kW}}{\text{K}} \\
 \text{Außentür} & L_5 = 0.005 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 2.0 \text{ m}^2 = 0.01 \frac{\text{kW}}{\text{K}} \\
 \text{Wand2} & L_6 = 0.005 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 20.0 \text{ m}^2 = 0.10 \frac{\text{kW}}{\text{K}} \\
 \text{Fenster2} & L_7 = 0.005 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 2.0 \text{ m}^2 = 0.01 \frac{\text{kW}}{\text{K}}
 \end{array} \tag{75}$$

Das Wesen der stationären Simulation besteht im Lösen der Matrixgleichung (41)

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{Z}}_u &= -\underline{\mathbf{M}}_u^{-1} \underline{\mathbf{M}}_v \underline{\mathbf{Z}}_v = \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{Z}}_v \\
 \begin{bmatrix} T_h \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 1 \\ L_1 & L_2 & 0 \\ 0 & -mc - L_{2,6,7} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 0 \\ mc + L_{1-5} & -mc - L_{3,4,5} & -1 \\ -mc - L_2 & -L_{6,7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_u \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} T_h \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 1 \\ 0.04 & 0.10 & 0 \\ 0 & -0.22 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.11 & -1 \\ -0.11 & -0.11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_u \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} T_h \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5.00 & -4.00 & -25.0 \\ 0.50 & 0.50 & 0 \\ 0.16 & -0.16 & -1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 10 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 0.4 \text{ kW} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 15 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 1.2 \text{ kW} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{76}$$

Die Lösungsmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ lässt aufgrund ihres allgemeinen Charakters sehr einfach Parameterstudien zu. Der allgemeine Charakter der Lösungsmatrix wird bei den nachfolgend mo-

difizierten Vorgaben besonders gut sichtbar. Statt der Raumtemperatur T_1 wird die Oberflächentemperatur T_h vorgegeben

$$\begin{aligned}
 \text{Oberfläche Heizkörper} \quad T_h &= 50.0 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 \text{Wärmeeintrag in Raum1} \quad \dot{Q}^q &= 0.40 \text{ kW} \\
 \text{Umgebungstemperatur} \quad T_u &= 10.0 \text{ } ^\circ\text{C} \\
 \text{Lüftungsstrom} \quad \dot{m}_l &= 0.01 \text{ kg s}^{-1} \left(c_l = 1.0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right)
 \end{aligned} \tag{77}$$

Durch partielle Invertierung entsteht das modifizierte Gebäudemodell für die geänderten Vorgaben

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{Z}}_u &= -\underline{\mathbf{M}}_u^{-1} \underline{\mathbf{M}}_v \underline{\mathbf{Z}}_v = \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{Z}}_v \\
 \begin{bmatrix} T_h \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 1 \\ -mc - L_{1-5} & L_2 & 0 \\ mc + L_2 & -mc - L_{2,6,7} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ -L_1 & -mc - L_{3,4,5} & -1 \\ 0 & -L_{6,7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_u \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 1 \\ -0.25 & 0.10 & 0 \\ 0.11 & -0.22 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ -0.04 & -0.11 & -1 \\ 0 & -0.11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h \\ T_u \\ \dot{Q}^q \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dot{Q}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.200 & 0.800 & 5.00 \\ 0.100 & 0.900 & 2.50 \\ 0.032 & -0.032 & -0.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 10 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 0.4 \text{ kW} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 15 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 1.2 \text{ kW} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{78}$$

Dieses Modell ermöglicht ebenfalls einfache Parameterstudien. Anmerkung: Die ersten beiden Spalten und Zeilen der Lösungsmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ sind wesensgleich mit der Betriebscharakteristik für Wärmeträger.

5.2 Dynamische Simulation

Das Modell für die dynamische Simulation von Gebäuden ist im Vergleich zur stationären Simulation wesentlich umfangreicher. Deshalb erfordert dieses Modell auch wesentlich mehr beschreibende Parameter. Es existieren sechs zustandsbeschreibende Variablen und nur eine Prozessgröße

$$\text{Lüftungsstrom} \quad \dot{m}_l = 0.0123 \text{ kg s}^{-1} \left(c_l = 1.0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right) \tag{79}$$

Die dynamische Simulation basiert auf der Lösung von Differenzialgleichungen mit variablen Randbedingungen. Diese sind die Temperatur der Oberfläche des Heizkörper T_h und Umgebungstemperatur T_u . Die zeitliche Abhängigkeit liegt in Form von Zeitreihen vor.

Die Zeitreihe für den tageszeitgesteuerten Zyklus der Oberflächentemperatur (bzw. Vorlauftemperatur) des Heizkörpers

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	h
$T_h = f(t)$	36	36	36	38	40	41	42	43	43	43	42	40	36	$^\circ\text{C}$

(80)

Die Zeitreihe für den Tageszyklus der Umgebungstemperatur (es sind auch mehrtägige oder mehrjährige Zyklen berechenbar)

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	h
$T_u = f(t)$	6.0	6.0	5.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	9.0	8.0	8.0	7.0	6.0	$^{\circ}C$

(81)

Mit den Beziehungen (54) und (55) werden die Fourier-Koeffizienten bestimmt. Durch Einsetzen dieser Konstanten in die Fourier-Matrix $\underline{\mathbf{F}}$ gemäß Gleichung (62) entsteht mit den Winkelfunktionen $\underline{\mathbf{Y}}$ eine explizite Beziehung für die Zyklen von Oberflächentemperatur des Heizkörpers $T_h = f(t)$ und Umgebungstemperatur $T_u = f(t)$.

$$\begin{bmatrix} T_h \\ T_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.0 \\ 7.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.5714 & -2.6324 & -0.5833 & -0.7217 \\ -0.9330 & -1.6160 & 0.2500 & -0.1443 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ \cos 2\omega t \\ \sin 2\omega t \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{T}}^e = \underline{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{Y}} \quad (82)$$

Das Tiny-Haus in Abbildung 2 weist die thermischen Leitwerte der nachfolgenden Tabelle auf, welche die Hauptdiagonale der Leitwertmatrix $\underline{\mathbf{L}}$ gemäß Gleichung (30) füllen

Heizkörper - Raum	$L_1 = \alpha A_h$	=	0.0400	$\frac{kW}{K}$
Raum - Wandschicht1	$L_2 = \alpha A_w / (1 + \frac{\alpha s}{2\lambda})$	=	0.1000	$\frac{kW}{K}$
Wandschicht1 - Wandschicht2	$L_3 = \lambda A_w / s$	=	0.0625	$\frac{kW}{K}$
Wandschicht2 - Wandschicht3	$L_4 = \lambda A_w / s$	=	0.0625	$\frac{kW}{K}$
Wandschicht3 - Umgebung	$L_5 = \alpha A_w / (1 + \frac{\alpha s}{2\lambda})$	=	0.1000	$\frac{kW}{K}$
Raum (2 Fenster) - Umgebung	$L_6 = k_f A_f$	=	0.0200	$\frac{kW}{K}$
Raum (Tür) - Umgebung	$L_7 = k_t A_t$	=	0.0100	$\frac{kW}{K}$

(83)

Hinweis: Für die Berechnung der thermischen Leitwerte von Wandschichten sind deren Kerntemperaturen relevant. Deshalb setzt sich Wärmewiderstand der Außenschichten aus Wärmeübergang und Wärmeleitung durch die halbe Wandschicht zusammen.

Die Speicherkapazitäten der thermischen Knoten für Kapazitätsmatrix $\underline{\mathbf{C}}$ sind in Tabelle (84) aufgeführt. Die Kapazitäten für die thermischen Knoten der Heizung und der Umgebung sind unendlich.

Heizkörper	$C_1 \Rightarrow \infty$	
Raum	$C_2 = m_r c_l = 75 \text{ kg} \cdot 1.00 \frac{kJ}{kgK} = 75.0 \frac{kJ}{K}$	
Wandschicht1	$C_3 = \frac{1}{3} m_w c_w = 1000 \text{ kg} \cdot 2.50 \frac{kJ}{kgK} = 2500 \frac{kJ}{K}$	
Wandschicht2	$C_4 = \frac{1}{3} m_w c_w = 1000 \text{ kg} \cdot 2.50 \frac{kJ}{kgK} = 2500 \frac{kJ}{K}$	
Wandschicht3	$C_5 = \frac{1}{3} m_w c_w = 1000 \text{ kg} \cdot 2.50 \frac{kJ}{kgK} = 2500 \frac{kJ}{K}$	
Umgebung	$C_6 \Rightarrow \infty$	

(84)

Der Zustandsvektor $\underline{\mathbf{Z}}$ enthält sechs zustandsbeschreibende Temperaturen, die Oberflächentemperatur des Heizkörpers T_h , der Raumtemperatur T_r , den Temperaturen der

drei Wandschichten T_1 , T_2 , T_3 und der Umgebungstemperatur T_u . Die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ beschreibt die Kopplung der sechs thermischen Knoten mit sieben konduktiven Wärmeströmen

$$\underline{\underline{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} T_h \\ T_r \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_u \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Mit der Strukturmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ wird der Weg von konvektiven Enthalpieströmen formuliert. Das vorliegende Beispiel erfordert nur eine „1“ für den Eintritt des Lüftungsstroms aus der Umgebung (Knoten 6) in den Raum (Knoten 2). Somit gilt $S(2,6) = 1$. Die Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}$ enthält auf Position (2,2) den Kapazitätsstrom des Lüftungsstrom $\dot{C} = \dot{m}_l c_l = 0.01 \text{ kW K}^{-1}$

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0.01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kW K}^{-1} \quad (86)$$

Die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_D$ bildet den Teil des Differenzialgleichungssystems zur Beschreibung von Konduktion und Konvektion. Hinweis: Die Dimension Koeffizienten wurde von s^{-1} auf h^{-1} transformiert

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_D = -\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T + \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}) \right)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.0000 & -9.1000 & 5.0000 & 0 & 0 & 2.1000 \\ 0 & 0.1440 & -0.2340 & 0.0900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0900 & -0.1800 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0900 & -0.2340 & 0.1440 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} h^{-1} \quad (87)$$

Aufgrund der unendlichen thermischen Kapazitäten entstehen Nullzeilen. Diese Nullzeilen (Zeilen 1 und 6) entfallen. Die Spalten der entsprechenden Variablen (Spalten 1 und 6) entfallen ebenfalls. Die verbleibende Matrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_T$ bildet den "Kern" des Modells für Konduktion und Konvektion

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_T = \begin{bmatrix} -9.1000 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0.1440 & -0.2340 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0.0900 & -0.1800 & 0.0900 \\ 0 & 0 & 0.0900 & -0.2340 \end{bmatrix} h^{-1} \quad (88)$$

Die entfernten Spalten (Spalten 1 und 6) bilden mit den dazu gehörigen Zustandsgrößen das Eingangsmodell. Für die Eingangsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E$ gilt.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.1000 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.1440 \end{bmatrix} h^{-1} \quad (89)$$

Die zyklische Eingangsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_G$ entsteht durch Multiplikation der Eingangsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E$ mit der Fourier-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_G = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\underline{\mathbf{F}}} &= \begin{bmatrix} -1.9200 & -2.0308 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.1440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.5714 & -2.6324 & -0.5833 & -0.7217 \\ -0.9330 & -1.6160 & 0.2500 & -0.1443 \end{bmatrix} h^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -7.1021 & -8.6584 & -0.6417 & -1.1403 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1344 & -0.2327 & 0.0360 & -0.0208 \end{bmatrix} h^{-1} \end{aligned} \quad (90)$$

Analog entsteht durch Multiplikation der Eingangsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E$ mit dem Eingangsvektor $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^e$ der Teilvektor der konstanten Eingänge $\underline{\underline{\mathbf{X}}}^*$ (oberer Teil des Eingangsvektors $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$)

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_E \underline{\underline{\mathbf{T}}}^e = \begin{bmatrix} -1.920 & -2.031 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.144 \end{bmatrix} h^{-1} \begin{bmatrix} 40 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ C = \begin{bmatrix} -91.017 \\ 0 \\ 0 \\ -1.008 \end{bmatrix} \frac{K}{h} \quad (91)$$

Die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ des Sinus-Generators für die Zykluszeit $t_z = 24h$ lautet

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\pi}{t_z} & 0 & 0 \\ \frac{2\pi}{t_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{t_z} \\ 0 & 0 & \frac{4\pi}{t_z} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2618 & 0 & 0 \\ 0.2618 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5236 \\ 0 & 0 & 0.5236 & 0 \end{bmatrix} h^{-1} \quad (92)$$

Die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ des Differenzialgleichungssystems entsteht durch Zusammenfügen der Matrix des Gebäudemodells $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_T$, der Matrix des Fourier-Modells $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_G$, der Matrix des Sinus-Generators $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ sowie einer Nullmatrix $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_G \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{G}}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} -9.100 & 5.000 & 0 & 0 & -7.102 & -8.658 & -0.642 & -1.140 \\ 0.144 & -0.234 & 0.090 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.090 & -0.180 & 0.090 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.090 & -0.234 & -0.134 & -0.233 & 0.036 & -0.021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.262 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.262 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.524 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.524 & 0 \end{bmatrix} h^{-1} \quad (93)$$

Der Eingangsvektor $\underline{\mathbf{X}}$ für das Differentialgleichungssystem entsteht aus dem Teileingangsvektor $\underline{\mathbf{X}}^*$ und einem Nullvektor $\underline{\mathbf{0}}$

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}^* \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -91.017 \\ 0 \\ 0 \\ -1.008 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} h^{-1} \quad (94)$$

Der stationäre Zustand gemäß Gleichung (66)

$$\underline{\mathbf{z}}_s = -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \underline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 20.04 \\ 17.53 \\ 13.52 \\ 9.51 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} \quad (95)$$

Die Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{3h}$ für die Zeitspanne $\Delta t = 3h$ gemäß Gleichungen (7), (8) sowie (66)

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{3h} = \begin{bmatrix} 0.0058 & 0.3610 & 0.0894 & 0.0108 & -1.4120 & -0.2607 & -0.1511 & 0.0567 \\ 0.0104 & 0.6476 & 0.1662 & 0.0208 & -0.3631 & -0.1909 & -0.0416 & -0.0106 \\ 0.0026 & 0.1662 & 0.6250 & 0.1489 & -0.0917 & -0.0773 & 0.0059 & -0.0032 \\ 0.0003 & 0.0208 & 0.1489 & 0.5149 & -0.4705 & -0.3297 & 0.0764 & -0.0284 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Der entsprechende Exponentialvektor $\underline{\mathbf{V}}_{3h}$ für die Zeitspanne $\Delta t = 3h$ nach den Gleichungen (7), (8) sowie (66)

$$\underline{\mathbf{V}}_{3h} = \begin{bmatrix} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{3h} \right) \underline{\mathbf{Z}}_s \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.2822 \\ 3.5256 \\ 0.6884 \\ 2.2284 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ } ^{\circ}C \quad (97)$$

Die Ermittlung des Einsprungpunktes für den zyklischen Prozess an der Stelle $t = 0$ sowie $t = t_z = 24 h$ erfordert die Exponentialmatrix für die Zeitspanne $\Delta t = t_z = 24 h$. Es gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{24h} = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0615 & 0.0643 & 0.0304 & -0.6408 & -1.1654 & -0.0486 & -0.1431 \\ 0.0018 & 0.1113 & 0.1164 & 0.0550 & 0.1910 & -0.3589 & 0.0249 & -0.0274 \\ 0.0019 & 0.1164 & 0.1332 & 0.0679 & 0.2559 & 0.0633 & -0.0077 & 0.0029 \\ 0.0009 & 0.0550 & 0.0679 & 0.0375 & 0.2575 & -0.6124 & -0.0093 & 0.0701 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Aus den Gleichungen (70) und (71) folgt der Zustand für den Einsprung in die rekursive Berechnung des zyklischen Prozesses.

$$\underline{\mathbf{Z}}_0 = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_0 \\ \underline{\mathbf{Y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_s + \left(\underline{\mathbf{E}} - \frac{\underline{\mathbf{P}}_{24h}}{\underline{\mathbf{Y}}_0} \right)^{-1} \underline{\mathbf{U}}_{24h} \underline{\mathbf{Y}}_0 \\ \underline{\mathbf{Y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.3999 \\ 17.8379 \\ 13.8693 \\ 9.8070 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} \quad (99)$$

Mit den Beziehungen (72) und (73) sind die zeitlichen Verläufe von Raumtemperatur T_h und den drei Temperaturen der Wandschichten T_1 , T_2 , T_3 rekursiv ermittelbar. Die Temperaturen der Heizungsoberfläche und der Umgebung folgen aus Gleichung (62).

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24	h
T_h	36.84	35.60	37.95	40.68	41.99	42.96	43.22	40.76	36.84	$^\circ\text{C}$
T_r	19.40	18.62	18.87	19.74	20.58	21.18	21.30	20.62	19.40	$^\circ\text{C}$
T_1	17.84	17.38	17.05	17.04	17.28	17.63	17.96	18.08	17.84	$^\circ\text{C}$
T_2	13.87	13.75	13.48	13.23	13.16	13.30	13.57	13.80	13.87	$^\circ\text{C}$
T_3	9.81	9.31	8.85	8.75	9.19	9.83	10.18	10.12	9.81	$^\circ\text{C}$
T_u	6.32	5.34	5.13	6.37	8.18	8.95	8.37	7.34	6.32	$^\circ\text{C}$

Die Tabellenwerte (100) sind in Abbildung 3 als zeitliche Temperaturverläufe grafisch dargestellt.

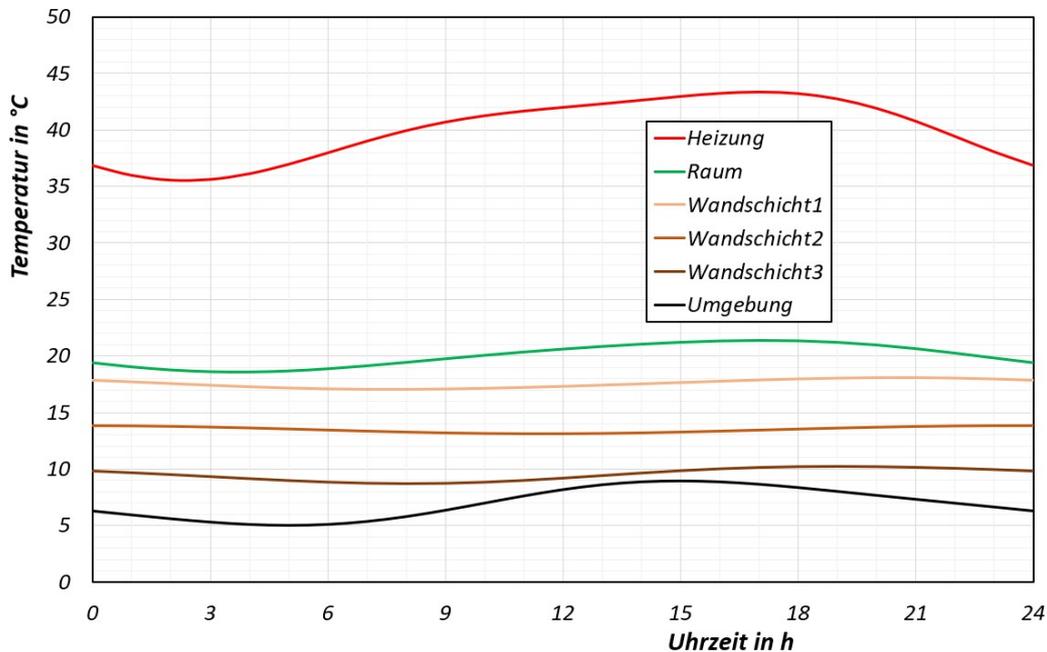


Abbildung 3: Zeitliche Verläufe der zustandsbeschreibenden Temperaturen
Erwartungsgemäß stimmen die Endwerte bei $t = 24 h$ mit den Startwerten bei $t = 0$ überein!

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Artikel sind die Grundzüge der stationären und dynamischen Gebäudesimulation auf Basis der Allgemeinen Netztheorie dargestellt. Besonderes Augenmerk gilt zyklischen Temperatur- und Strahlungsverläufen innerhalb von Referenzzeiträumen. Sämtliche mathematischen Modelle basieren fast ausnahmslos auf linearen algebraischen Gleichungen sowie linearen Differentialgleichungen und erfordern keine Iterationen. Die Exponentialfunktion als Lösung von linearen Differentialgleichungen spielt eine entscheidende Rolle, da sie u.a. die Sinus- und Cosinusfunktion miteinschließt.

Die vorgestellten Modelle gestatten die Berücksichtigung physikalischer Phänomene wie Konduktion, Konvektion, innere Wärmequellen und -senken, thermische Strahlung sowie thermische Energiespeicherung.

Das Modell für die stationäre Simulation beliebiger Gebäudestrukturen erfordert vier leicht parametrierbare Basis-Matrizen mit dazu gehörigen Vektoren. Diese Matrizen gestatten mit den üblichen Matrizenoperationen die Generierung eines lineares Gleichungssystems mit eindeutigen Lösungen. Für das Modell zur dynamischen Simulation sind drei weitere ebenfalls leicht zu parametrierende Matrizen erforderlich. Diese Matrizen sind ebenfalls mit „klassischen Matrizenoperationen iterationslos zu Lösungsgleichungen verarbeitbar. Diese Modelle werden an überschaubaren Beispielen demonstriert.

Die Möglichkeiten der vorgestellten Modelle sind nicht ausgeschöpft. Folgende Erweiterungen sind realisierbar:

- thermische und hydraulische Eigenschaften eines Heizungssystems
- Regelungs- und Steuerungssysteme
- Wärmerückgewinnung durch Rekuperatoren (Fortluft/Frischluft)
- Temperaturprofile von Heizkörpern
- Wärmepumpen

Die Anwendung der vorgestellten Modelle ist nur mit Computern möglich. Moderne PCs mit Standardsoftware sind völlig ausreichend.

7 Formelzeichen

7.1 Skalare

α	... Wärmeübergangskoeffizient	... $kW\ m^{-2}K^{-1}$
c	... spez. Wärmekapazität	... $kJ\ kg^{-1}K^{-1}$
c	... Fourier – Konstante	... –
Δt	... Zeitdifferenz	... s, h
\dot{H}	... Enthalpiestrom	... kW
i	... Zählindex	... –
j	... imaginäre Einheit	... –
k	... Wärmedurchgangskoeffizient	... $kW\ m^{-2}K^{-1}$
k	... Anzahl thermischer Knoten	... –
λ	... Wärmeleitkoeffizient	... $kW\ m^{-1}K^{-1}$
λ	... Eigenwert	... s^{-1}
l	... Anzahl Kopplungen	... –
L	... thermischer Leitwert	... $kW\ K^{-1}$
m	... Masse	... kg
\dot{m}	... Massestrom	... $kg\ s^{-1}$
n	... Grad der Winkelfunktion	... –
p	... Zahl der Messpunkte	... –
\dot{Q}	... Wärmestrom	... kW
s	... Schichtdicke	... m
s	... Fourier – Konstante	... –
t	... Zeit	... s, h
T	... Temperatur	... $^{\circ}C, K$
z	... Anzahl Zeitschritte	... –

7.2 Vektoren

$\underline{\mathbf{B}}$... Eingangsvektor	... kW
$\underline{\mathbf{C}}$... Vektor der Wärmekapazitäten	... $kJ\ K^{-1}$
$\underline{\dot{\mathbf{C}}}$... Vektor der Wärmekapazitätsströme	... $kW\ K^{-1}$
$\underline{\dot{\mathbf{Q}}}$... Vektor der externen Wärmeströme	... kW
$\underline{\dot{\mathbf{q}}}$... Vektor der internen Wärmeströme	... kW
$\underline{\mathbf{T}}$... Temperaturvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{\dot{\mathbf{H}}}$... Enthalpiestromvektor	... kW
$\underline{\mathbf{V}}$... Exponentialvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{\mathbf{X}}$... Eingangsvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{\mathbf{Y}}$... Vektor der Winkelfunktionen	... –
$\underline{\mathbf{Z}}$... Zustandsvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{\mathbf{z}}$... reduzierter Zustandsvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{\mathbf{0}}$... Nullvektor	... –

7.3 Matrizen

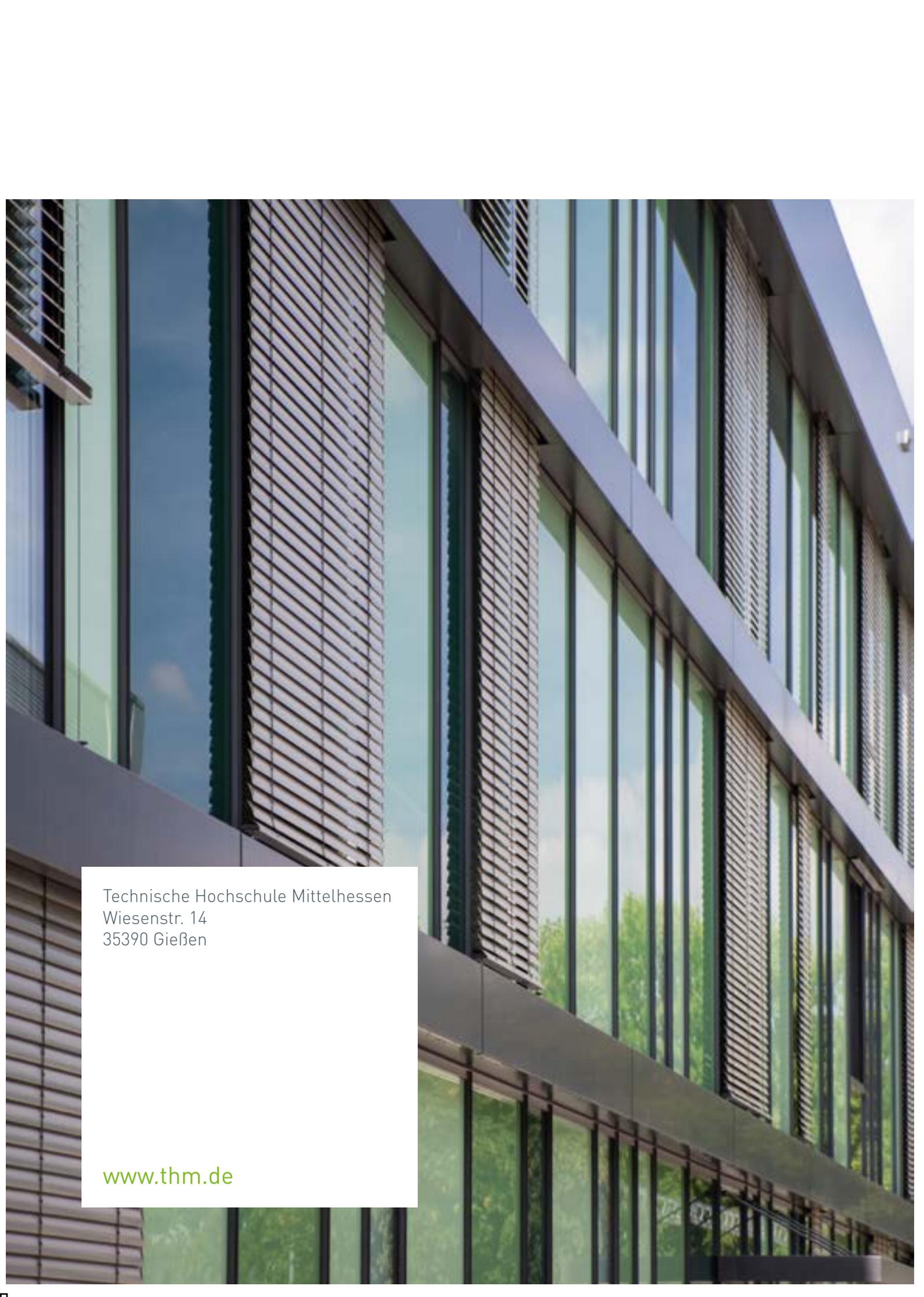
$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$... Matrix der Kapazität	... $kJ K^{-1}$
$\underline{\underline{\underline{\underline{\dot{C}}}}}$... Matrix der Kapazitätsströme	... $kW K^{-1}$
$\underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}$... Einheitsmatrix	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}$... Matrix der Fourierkoeffizienten	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{G}}}}$... Matrix des Sinus – Generators	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}$... Kopplungsmatrix	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}$... Matrix der thermischen Leitwerte	... $kW K^{-1}$
$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}}$... Matrix der Eigenwerte	... s^{-1}, h^{-1}
$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}}}$... Matrix der Eigenwerte	... s^{-1}, h^{-1}
$\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}$... Koeffizientenmatrix, Modellmatrix	... s^{-1}
$\underline{\underline{\underline{\underline{N}}}}$... Übertragungsmatrix	... —, s^{-1}
$\underline{\underline{\underline{\underline{P}}}}$... Exponentialmatrix	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$... Strukturmatrix	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}}$... Matrix der Eigenvektoren	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{U}}}}$... Matrix der Frequenzeingänge	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{W}}}}$... Matrix der Winkelfunktionen	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{0}}}}$... Nullmatrix	... —

7.4 Indizes

\square^a	... Ausgang
\square^e	... Eingang
\square^q	... Quelle
\square^s	... stationär, Senke
\square^*	... Teil...
\square_{kd}	... konduktiv
\square_{kv}	... konvektiv
\square_D	... DGLS
\square_E	... Eingang
\square_G	... Generator
\square_M	... Modell
\square_R	... revers
\square_T	... thermisch
\square_t	... Zeit
\square_U	... unbekannt
\square_u	... Umgebung
\square_V	... vorgegeben

8 Literatur

- [1] Takahashi, Y.: Regelungstechnik, 14 (1966) 10, S. 449 - 455
- [2] Takahashi, Y.: Regelungstechnik, 14 (1966) 11, S. 513 - 518
- [3] Korn, U.: „Beitrag zur Anwendung der Zustandsraumbeschreibung und Einführung des Matrix-Signalflußbildes für den Entwurf von Prozessregelungen“; Dissertation Magdeburg 1968
- [4] Naslin, P.: „Dynamik linearer und nichtlinearer Systeme“
R. Oldenburg, München-Wien, 1968
- [5] Zurmühl, R.; Falk, S.: „Matrizen und ihre Anwendungen“
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1984
- [6] Strelow, O.: „Highspeed-Modell zur dynamischen Simulation von Gebäuden“; 6. FEW-Kolloquium Energiesystemtechnik, Gießen 2003
- [7] Kunz, G.: „Dynamische Simulation eingeschwungener thermischer Zustände von Druckgießformen“; Dissertation TU Dresden 2013
- [8] Kunz, G.; Strelow, O.; Beckmann, M.
„Dynamic modeling of fluid-cooled tools in periodic thermal processes“
International Journal of Thermal Sciences 84 (2014) 228-251
- [9] Lauster, M.: „Parametrierbare Gebäudemodelle für dynamische Energiebedarfsrechnungen von Stadtquartieren“;
Dissertation RWTH Aachen 2018
- [10] Strelow, O.: „Die Allgemeine Theorie der technischen Netze“
Vorträge und Manuskripte

A photograph of a modern building facade featuring large glass windows and metal panels. The glass reflects the sky and surrounding greenery. The metal panels have a textured, grid-like pattern. The building is viewed from a low angle, looking up.

Technische Hochschule Mittelhessen
Wiesenstr. 14
35390 Gießen

www.thm.de