

Frank Müller

Ein Approximationsverfahren für die Temperaturen in
einem Gegenstrom-Wärmetauscher

THM-Hochschulschriften Band 36

Frank Müller

Ein Approximationsverfahren für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher

THM-Hochschulschriften Band 36

THM-Hochschulschriften Band 36

© 2025 Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und Datenverarbeitung

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Die Hochschulschriften sind online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Ein Approximationsverfahren für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher

Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen
Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften
und Datenverarbeitung
Wilhelm-Leuschner-Straße 13
D-61169 Friedberg, Germany

Email: Frank.Mueller@mnd.thm.de

20. August 2025

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird ein neues Approximationsverfahren für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher entwickelt. Die mathematische Modellierung führt auf ein Anfangs- und Randwertproblem für ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen zur Beschreibung des zeitlichen und räumlichen Verlaufs der Temperaturen im Wärmetauscher. Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes können die Existenz und die Eindeutigkeit von verallgemeinerten Lösungen für das Anfangs- und Randwertproblem bewiesen werden. Diese verallgemeinerten Lösungen sind die Lösungen eines Systems von Integralgleichungen, welches bei der Anwendung der Methode der Charakteristiken auftritt. Das Approximationsverfahren basiert auf der numerischen Lösung dieses Systems von Integralgleichungen. Zur Validierung des Verfahrens wird eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems für einen Spezialfall als Benchmark Lösung konstruiert. Um das Verfahren mit einer alternativen Methode zu vergleichen, wird weiterhin eine Linienmethode entwickelt, die auf einer Semi-Diskretisierung der Ortsvariablen basiert. In einem numerischen Beispiel wird die approximative Lösung des neuen Verfahrens verglichen mit der Benchmark Lösung und der Lösung der Linienmethode.

Schlüsselwörter

Partielle Differentialgleichung, Hyperbolisches System, Anfangs- und Randwertproblem, Gegenstrom-Wärmetauscher, System von Integralgleichungen, Approximation, Benchmark Lösung, Linienmethode

1 Einleitung

1.1 Wärmetauscher

Wärmetauscher übertragen thermische Energie (Wärme) von einem fließenden Fluid auf ein anderes fließendes Fluid. Beide Fluide sind getrennt durch eine Trennwand, und somit findet der Wärmeaustausch durch diese Trennwand statt. Die versorgende Seite mit dem wärmeren Fluid heißt Primärseite und die aufnehmende Seite mit dem kühleren Fluid heißt Sekundärseite. In diesem Artikel wird ein Gegenstrom-Wärmetauscher betrachtet, hierbei fließen die beiden Fluide in entgegengesetzte Richtung. Mögliche Realisierungen sind z.B. Doppelrohr-Wärmetauscher und Plattenwärmetauscher.

Plattenwärmetauscher werden in der Heizungstechnik oft zur Warmwasserbereitung eingesetzt. Dabei geschieht die Erwärmung des Nutzwassers sowohl auf direktem Weg als auch durch Laden von Schichtenladespeichern, die das Nutzwasser enthalten. Eine Alternative zu den Schichtenladespeichern bieten Rohrwendelspeicher. Bei einem Rohrwendelspeicher findet der Wärmetausch durch eine Rohrwendel im Inneren des Speichers statt und somit kann ein Rohrwendelspeicher als Doppelrohr-Gegenstrom-Wärmetauscher betrachtet werden. Die Untersuchung des dynamischen Verhaltens eines Gegenstrom-Wärmetauschers ist daher von großem Interesse für die modellbasierte Entwicklung von Regelungsmethoden in der Heizungstechnik.

1.2 Anfangs- und Randwertproblem

Wir betrachten einen Gegenstrom-Wärmetauscher der Länge L . Die Temperaturen im Punkt x zur Zeit t auf der Primärseite und auf der Sekundärseite bezeichnen wir mit $\vartheta_1(x, t)$ und $\vartheta_2(x, t)$. Beginnend zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ tritt auf der Primärseite im Punkt $x = 0$ das wärmere Fluid mit der dynamischen Eintrittstemperatur $\vartheta_{1,in}(t)$ und der konstanten Geschwindigkeit v_1 in den Wärmetauscher ein, gibt Wärme an das Fluid auf der Sekundärseite ab, und tritt an der Stelle $x = L$ wieder aus dem Wärmetauscher aus. Auf der Sekundärseite tritt im Punkt $x = L$ das kältere Fluid mit der dynamischen Eintrittstemperatur $\vartheta_{2,in}(t)$ und der konstanten Geschwindigkeit v_2 in den Wärmetauscher ein, nimmt Wärme von der Primärseite auf und verlässt an der Stelle $x = 0$ den Wärmetauscher wieder.

Vernachlässigt man Diffusionseffekte und thermische Verluste nach außen, so liefert eine Energiebilanz mit einem linearen Wärmeübertragungsmodell das folgende Anfangs- und Randwertproblem für die Temperaturen im Wärmetauscher:

$$\frac{\partial \vartheta_1(x, t)}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial \vartheta_1(x, t)}{\partial x} - \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_1}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vartheta_2(x, t)}{\partial t} = v_2 \frac{\partial \vartheta_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_2}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T] \quad (2)$$

$$\vartheta_1(x, 0) = \vartheta_{1,0}(x), \quad x \in [0, L] \quad (3)$$

$$\vartheta_2(x, 0) = \vartheta_{2,0}(x), \quad x \in [0, L] \quad (4)$$

$$\vartheta_1(0, t) = \vartheta_{1,in}(t), \quad t \in (0, T] \quad (5)$$

$$\vartheta_2(L, t) = \vartheta_{2,in}(t), \quad t \in (0, T] \quad (6)$$

Hierbei sind $\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}$ gegebene stetige Anfangswerte auf der Primär- und Sekundärseite, die Werte T_1, T_2 sind Zeitkonstanten und T ist die Beobachtungszeit des Prozesses.

Das PDE System (1) + (2) ist ein hyperbolisches System [1, 2, 3] und daher ist die Existenz klassischer Lösungen [3, 4] des Anfangs- und Randwertproblems abhängig von den Anfangswerten und den Eintrittstemperaturen.

1.3 Aus der Literatur bekannte Methoden

Da das Anfangs- und Randwertproblem (1) - (6) im allgemeinen Fall keine klassische Lösung besitzt, werden in vielen Anwendungen numerische Methoden verwendet, um Näherungslösungen zu erhalten.

Jaswon und Smith [5] konstruieren Approximationen mit Reihen modifizierter Bessel Funktionen [6]. Zavala-Rio und Santiesteban-Cos [7, 8] sowie Huhtala und Paunonen [9] nutzen Halbgruppentheorie [3, 4]. Gvozdenac [10, 11] verwendet die Laplace Transformation und erhält ebenfalls Reihen von modifizierten Bessel Funktionen. Die Anwendung der inversen Laplace Transformation führt auf eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art und wird numerisch behandelt mit einer Kollokationsmethode [12, 13]. Kreuzinger, Bitzer und Marquardt [14] verwenden eine Linienmethode [15]. Verschiedene räumliche Diskretisierungen höherer Ordnung werden betrachtet und zur Integration des resultierenden DGL Systems wird ein Standard Solver verwendet. Nash, Badithela und Jain [16] betrachten einen Rohrwendelspeicher, der als Gegenstrom-Wärmetauscher angesehen werden kann. Der Speicher wird diskretisiert und in jedem finiten Teilvolumen werden Energieerhaltungsmethoden [17, 18] verwendet, um ein DGL System zu erhalten (Finite Volumen Methode). Das DGL System wird dann mit einem Finite Differenzen Schema in Verbindung mit einer Temperatur Inversions-Korrektur-Methode [19] behandelt. Wagner, Meurer und Kugi [20] behandeln den Fall linearer und nichtlinearer Wärmeübertragung mit Potenzreihenansätzen und einer geeigneten Gebietszerlegung.

1.4 Das neue Verfahren

Der Entladeprozess in einem Warmwasserspeicher kann mit Hilfe eines in [21] entwickelten Approximationsverfahrens mit geringen numerischen Kosten beschrieben werden. Dieses Verfahren kann auf den Ladeprozess in einem Schichtenladespeicher übertragen werden. Es kann jedoch nicht auf den Ladeprozess in einem Rohrwendelspeicher angewendet werden, denn hier findet die Wärmeübertragung durch Wärmetausch und nicht durch Konvektion statt. Da der Rohrwendelspeicher im Ladeprozess als Gegenstrom-Wärmetauscher betrachtet werden kann, wird in dieser Arbeit ein Approximationsverfahren für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher entwickelt.

In [22] wurde eine verallgemeinerte Formulierung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) in Form eines Systems von Integralgleichungen entwickelt. Hierbei sind Lösungen stetige Funktionen. Da das zugrunde liegende mathematische Modell keine Diffusionsterme enthält, kann von den Lösungen im allgemeinen Fall keine Glattheit erwartet werden und daher erscheint die verallgemeinerte Formulierung dem Problem besser angepasst. Durch die Definition eines geeigneten Integral-Operators und eines geeigneten Banachraumes, können Existenz und Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen werden.

Die zugehörige Picard Iteration liefert zwar ein Verfahren zur numerischen Berechnung der Lösung, welches jedoch aufgrund sehr hoher numerischer Kosten für praktische Berechnungen nicht geeignet ist. Daher wird in dieser Arbeit ein Approximationsverfahren mit geringeren numerischen Kosten entwickelt. Zur Validierung des Approximationsverfahrens wird eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) – (6) für einen Spezialfall als Benchmark Lösung konstruiert [23]. Zum Vergleich der approximativen Lösung des neuen Verfahrens mit einer alternativen Methode wird weiterhin eine Linienmethode (Method of Lines - MOL, [15]) entwickelt. Diese Methode basiert auf einer Semi-Diskretisierung der Ortsvariablen. In einem numerischen Beispiel wird die approximative Lösung des neuen Verfahrens verglichen mit der Benchmark Lösung und der Lösung der Linienmethode.

2 Klassische und verallgemeinerte Lösungen

2.1 Klassische Lösungen

Jede stetig partiell differenzierbare Funktion $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T$ die das PDE System (1) + (2) im klassischen Sinne löst und die Anfangs- und Randbedingungen (3) - (6) erfüllt, heißt klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6). Mit Standardtechniken können die folgenden beiden Sätze bewiesen werden:

Satz 1. *Das Anfangs- und Randwertproblem (1) - (6) besitzt höchstens eine klassische Lösung.*

Satz 2. *(Kompatibilitätsbedingungen) Eine klassische Lösung von (1) - (6) kann nur existieren, wenn die Anfangswerte und Eintrittstemperaturen die folgenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllen:*

$$\vartheta_{1,0}(0) = \vartheta_{1,in}(0) \quad (7)$$

$$\vartheta_{2,0}(L) = \vartheta_{2,in}(0) \quad (8)$$

$$\frac{d\vartheta_{1,in}(0)}{dt} + v_1 \frac{d\vartheta_{1,0}(0)}{dx} = \frac{\vartheta_{2,0}(0) - \vartheta_{1,0}(0)}{T_1} \quad (9)$$

$$\frac{d\vartheta_{2,in}(0)}{dt} - v_2 \frac{d\vartheta_{2,0}(L)}{dx} = \frac{\vartheta_{1,0}(L) - \vartheta_{2,0}(L)}{T_2} \quad (10)$$

2.2 Charakteristiken

Das PDE System (1) + (2) kann geschrieben werden in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & -v_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_1^{-1} & T_1^{-1} \\ T_2^{-1} & -T_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die Systemmatrix ist eine Diagonalmatrix und die Eigenwerte sind gegeben durch:

$$\lambda_1 = v_1 > 0, \quad \lambda_2 = -v_2 < 0 \quad (12)$$

Also ist das PDE System (1) + (2) ein hyperbolisches System in Normaldarstellung. Die Anfangs- und Randbedingungen (3) - (6) liefern Cauchy Daten auf der Kurve:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \quad (13)$$

mit:

$$\Gamma_1 = \{0\} \times (0, T], \quad \Gamma_2 = [0, L] \times \{0\}, \quad \Gamma_3 = \{L\} \times (0, T] \quad (14)$$

Die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{\partial x_i(\xi_i, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_i, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

und die Anfangsbedingungen $x_i(\xi_i, 0) = \xi_i$ liefern:

$$x_i(\xi_i, \tau) = \xi_i + \lambda_i \tau, \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

Für jedes $x \in (0, L)$ und genügend kleine Werte von t existiert genau ein $\xi_i(x, t)$ so, dass die Charakteristik

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} x_i(\xi_i(x, t), \tau) \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_i(x, t) + \lambda_i \tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad (17)$$

auf Γ_2 startet und durch den Punkt (x, t) geht. Wegen

$$x_i(\xi_i(x, t), t) = x \quad \Leftrightarrow \quad \xi_i(x, t) + \lambda_i t = x \quad (18)$$

ist dieser Wert:

$$\xi_i(x, t) = x - \lambda_i t \quad (19)$$

und die Charakteristik zu λ_i ist gegeben durch:

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} x - \lambda_i t + \lambda_i \tau \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \lambda_i(t - \tau) \\ \tau \end{pmatrix} \quad (20)$$

Der Punkt

$$P_i(x, t) = \begin{pmatrix} \xi_i(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \lambda_i t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

ist dann der Startpunkt dieser Charakteristik auf Γ_2 .

Für wachsende Werte von t verlässt $\xi_i(x, t) = x - \lambda_i t$ das Intervall $[0, L]$ und somit verlässt der Startpunkt der Charakteristik die Kurve Γ_2 . Wegen $\lambda_1 = v_1 > 0$ verlässt $\xi_1(x, t)$ das Intervall zur linken Seite und der Zeitpunkt, an dem $\xi_1(x, t)$ das Intervall verlässt, ist:

$$\tau_1(x) = \frac{x}{v_1} \quad (22)$$

Für $t > \tau_1(x)$ ist der Startpunkt

$$Q_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t - \tau_1(x) \end{pmatrix} \quad (23)$$

der Charakteristik zu λ_1 dann auf der Kurve Γ_1 . Wegen $\lambda_2 = -v_2 < 0$ verlässt der Punkt $\xi_2(x, t)$ das Intervall zur rechten Seite und der Zeitpunkt, an dem $\xi_2(x, t)$ das Intervall verlässt, ist:

$$\tau_2(x) = \frac{L - x}{v_2} \quad (24)$$

Für $t > \tau_2(x)$ ist der Startpunkt

$$Q_2(x, t) = \begin{pmatrix} L \\ t - \tau_2(x) \end{pmatrix} \quad (25)$$

der Charakteristik zu λ_2 dann auf der Kurve Γ_3 .

2.3 Darstellung klassischer Lösungen

Ist ϑ eine klassische Lösung des PDE Systems (1) + (2), so erhalten wir entlang der Charakteristik (20) für die Komponenten:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) = \lambda_i \frac{\partial \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau)}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau)}{\partial \tau} \quad (26)$$

Da ϑ eine klassische Lösung von (1) + (2) ist, folgt:

$$\lambda_i \frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\vartheta_j(x, t) - \vartheta_i(x, t)}{T_i} \quad (27)$$

und somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) &= \frac{\vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) - \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau)}{T_i}, \\ i, j &= 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (28)$$

Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ führt das System (28) nicht zu einem geschlossenen DGL System und somit liefert die Methode der Charakteristiken keine Lösung. Jedoch liefert die Integration entlang der Charakteristiken ein System von Integralgleichungen, das zur Definition verallgemeinerter Lösungen führt. Für die spätere Konvergenzanalyse stellt es sich als geeignet heraus, ϑ_i mit einer Exponentialfunktion zu multiplizieren.

Sei nun ϑ eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6). Entlang der Charakteristik (20) erhalten wir für die Komponenten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) &= \frac{1}{T_i} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) \\ &+ e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \frac{\partial}{\partial \tau} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) \end{aligned} \quad (29)$$

Mit (28) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) &= e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \left(\frac{\vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) - \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau)}{T_i} \right) \\ &+ \frac{1}{T_i} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) \end{aligned} \quad (30)$$

und somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) &= \frac{1}{T_i} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau), \\ i, j &= 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (31)$$

Integration liefert für $t \leq \tau_i(x)$:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) - e^{-\frac{t}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i t, 0) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T_i} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (32)$$

Da ϑ die Anfangsbedingungen (3) + (4) erfüllt, gilt $\vartheta_i(x - \lambda_i t, 0) = \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t)$ und somit erhalten wir für $t \leq \tau_i(x)$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) &= e^{-\frac{t}{T_i}} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau, \\ i, j &= 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (33)$$

Für $t > \tau_i(x)$ starten die Charakteristiken in (23) und (25). Die Integration von (31) muss daher von $t - \tau_i(x)$ bis t durchgeführt werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) - e^{-\frac{\tau_i(x)}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i \tau_i(x), t - \tau_i(x)) \\ &= \int_{t-\tau_i(x)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_i(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T_i} \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (34)$$

Mit (12), (22) und (24) folgt:

$$x - \lambda_i \tau_i(x) = \begin{cases} 0 & , \quad i = 1 \\ L & , \quad i = 2 \end{cases} \quad (35)$$

Da ϑ die Randbedingungen (5) und (6) erfüllt, folgt weiter:

$$\vartheta_i(x - \lambda_i \tau_i(x), t - \tau_i(x)) = \vartheta_{i,in}(t - \tau_i(x)), \quad i = 1, 2 \quad (36)$$

und somit erhalten wir für $t > \tau_i(x)$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) &= e^{-\frac{\tau_i(x)}{T_i}} \vartheta_{i,in}(t - \tau_i(x)) + \frac{1}{T_i} \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau, \\ i, j &= 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (37)$$

Definition 1. Sei $\mathbf{1}_M$ die Indikatorfunktion der Menge M . Für jede stetige Funktion $\vartheta : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieren wir die Funktion $F\vartheta : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch:

$$\begin{aligned} (F\vartheta)_i(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \left(e^{-\frac{t}{T_i}} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \right) \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \frac{1}{T_i} \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) e^{-\frac{\tau_i(x)}{T_i}} \vartheta_{i,in}(t - \tau_i(x)), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (38)$$

Satz 3. Jede klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) ist eine Lösung der Integralgleichung $F\vartheta = \vartheta$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus der eben durchgeführten Analyse. $\square$

2.4 Verallgemeinerte Lösungen

Von Satz 3 wissen wir, dass jede klassische Lösung von (1) - (6) auch eine Lösung der Integralgleichung $F\vartheta = \vartheta$ ist. Eine Lösung der Integralgleichung $F\vartheta = \vartheta$ muss aber nicht differenzierbar sein. Sind die Kompatibilitätsbedingungen (7) + (8) erfüllt, so ist $F\vartheta$ stetig.

Satz 4. Es seien die Kompatibilitätsbedingungen (7) + (8) erfüllt. Dann existiert genau eine Lösung $\vartheta \in C([0, L] \times [0, T], \mathbb{R}^2)$ der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$.

Beweis. Die Menge $X = C([0, L] \times [0, T], \mathbb{R}^2)$ ausgestattet mit der Norm

$$\|\vartheta\|_\infty = \max \{ \|\vartheta_1\|_\infty, \|\vartheta_2\|_\infty \} \quad (39)$$

bildet einen Banachraum. Da die Bedingungen (7) + (8) erfüllt sind, ist für jedes $\vartheta \in X$ auch $F\vartheta \in X$. Also ist der Operator $F : \vartheta \mapsto F\vartheta$ eine Selbstabbildung $X \rightarrow X$. Seien $\vartheta, \varphi \in X$. Durch Standardabschätzungen und Auswertung der Integrale erhält man:

$$\|(F\vartheta)_i - (F\varphi)_i\|_\infty \leq \|\vartheta - \varphi\|_\infty \max_{x \in [0, L]} \left(1 - e^{-\frac{\tau_i(x)}{T_i}} \right), \quad i = 1, 2 \quad (40)$$

Mit (22) und (24) folgt:

$$\max_{x \in [0, L]} \tau_i(x) = \frac{L}{v_i}, \quad i = 1, 2 \quad (41)$$

und dies führt zu:

$$\|(F\vartheta)_i - (F\varphi)_i\|_\infty \leq \|\vartheta - \varphi\|_\infty \left(1 - e^{-\frac{L}{v_i T_i}} \right), \quad i = 1, 2 \quad (42)$$

Mit

$$q = \max \left\{ \left(1 - e^{-\frac{L}{v_1 T_1}} \right), \left(1 - e^{-\frac{L}{v_2 T_2}} \right) \right\} \quad (43)$$

erhalten wir $\|F\vartheta - F\varphi\|_\infty \leq q \|\vartheta - \varphi\|_\infty$. Wegen $|q| < 1$ ist F ein kontrahierender Operator auf X und mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Behauptung. $\square$

Seien nun $\vartheta_{i,0}$ und $\vartheta_{i,in}$ stetig differenzierbar und es seien die Kompatibilitätsbedingungen (7) - (10) erfüllt. Für jeden Startwert in X konvergiert die Folge der Picard Iterierten bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und somit gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung ϑ aus dem Satz. Setzen wir $\vartheta_i^{[0]} = 0$ für $i = 1, 2$, so sind die Iterierten $\vartheta_i^{[1]}$ stetig partiell differenzierbar. Durch Induktion folgt nun, dass alle $\vartheta^{[k]}$ für $k \geq 1$ stetig partiell differenzierbar sind und die Folgen der partiellen Ableitungen gleichmäßig konvergieren. Hieraus folgt, dass ϑ stetig partiell differenzierbar ist. Mit (38) erhält man dann, dass ϑ eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) ist.

Dies bedeutet, dass die Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$ äquivalent zum Anfangs- und Randwertproblem (1) - (6) ist, wenn die Anfangs- und Randwerte stetig differenzierbar sind und die Kompatibilitätsbedingungen (7) - (10) erfüllt sind. Für die Existenz und Eindeutigkeit der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$ werden aber nur die Stetigkeit der Anfangs- und Randwerte und nur (7) + (8) gefordert. Daher heißen Lösungen der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$ verallgemeinerte Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6).

2.5 Picard Iteration

Ist ϑ die eindeutig bestimmte stetige Lösung der Fixpunktgleichung $F\vartheta = \vartheta$ aus Satz 4, so konvergiert für jedes $\vartheta^{[0]} \in C([0, L] \times [0, T], \mathbb{R}^2)$ die Folge der Picard Iterierten

$$\vartheta^{[k+1]} = F\vartheta^{[k]}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (44)$$

in $C([0, L] \times [0, T], \mathbb{R}^2)$ gegen die eindeutige Lösung ϑ aus Satz 4. Für die Komponenten von $\vartheta^{[k+1]}$ erhalten wir mit (38) die Darstellungen:

$$\begin{aligned} \vartheta_1^{[k+1]}(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \frac{x}{v_1}]}(t) e^{-\frac{t}{T_1}} \vartheta_{1,0}(x - v_1 t) \\ &\quad + \mathbf{1}_{[0, \frac{x}{v_1}]}(t) \frac{1}{T_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \vartheta_2^{[k]}(x - v_1(t - \tau), \tau) d\tau \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\frac{x}{v_1}, T]}(t) \frac{1}{T_1} \int_{t-\frac{x}{v_1}}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \vartheta_2^{[k]}(x - v_1(t - \tau), \tau) d\tau \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\frac{x}{v_1}, T]}(t) e^{-\frac{x}{v_1 T_1}} \vartheta_{1,in} \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

und:

$$\begin{aligned} \vartheta_2^{[k+1]}(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \frac{L-x}{v_2}]}(t) e^{-\frac{t}{T_2}} \vartheta_{2,0}(x + v_2 t) \\ &\quad + \mathbf{1}_{[0, \frac{L-x}{v_2}]}(t) \frac{1}{T_2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} \vartheta_1^{[k]}(x + v_2(t - \tau), \tau) d\tau \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\frac{L-x}{v_2}, T]}(t) \frac{1}{T_2} \int_{t-\frac{L-x}{v_2}}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} \vartheta_1^{[k]}(x + v_2(t - \tau), \tau) d\tau \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\frac{L-x}{v_2}, T]}(t) e^{-\frac{L-x}{v_2 T_2}} \vartheta_{2,in} \left(t - \frac{L-x}{v_2} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Auswertung von $\vartheta_2^{[k+1]}(x - v_1(t - \tau), \tau)$ und einsetzen in (45) liefert für $\vartheta_1^{[k+2]}(x, t)$ einen Ausdruck mit 10 Summanden. Aus einem Term für $\vartheta_1^{[0]}(x, t)$ werden 10 Terme für $\vartheta_1^{[2]}(x, t)$. Diese Vervielfachung setzt sich entsprechend mit jedem Iterationsschritt fort. Hinzu kommt die Komplexität der auftretenden Mehrfachintegrale, welche die numerischen Kosten der Berechnung noch mehr erhöht. Das gleiche gilt für die Komponente $\vartheta_2^{[k]}(x, t)$. Daher ist die Berechnung der Picard Iterierten für eine hohe Anzahl von Iterationsschritten mit sehr hohen numerischen Kosten verbunden.

3 Approximationsverfahren

3.1 Motivation

Mit der Picard Iteration steht grundsätzlich ein numerisches Verfahren zur Bestimmung von Approximationen für die eindeutige Lösung der Gleichung $F\vartheta = \vartheta$ aus Satz 4 zur Verfügung. Wie bereits angesprochen, ist die Berechnung der Picard Iterierten mit sehr hohen numerischen Kosten verbunden, insbesondere für eine große Anzahl von Iterationsschritten. Wir werden daher hier ein alternatives Verfahren zur Lösung der Gleichung $F\vartheta = \vartheta$ entwickeln, welches mit geringeren numerischen Kosten verbunden ist.

3.2 Lineare Spline-Interpolation

Es sei ϑ die eindeutig bestimmte Lösung der Integralgleichung $F\vartheta = \vartheta$, d.h. für $i, j = 1, 2$ mit $i \neq j$ gelte:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) e^{-\frac{t}{T_i}} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) e^{-\frac{\tau_i(x)}{T_i}} \vartheta_{i,in}(t - \tau_i(x)) \\ &\quad + \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \frac{1}{T_i} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &\quad + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \frac{1}{T_i} \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \vartheta_j(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \end{aligned} \quad (47)$$

Nun seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$. Wir setzen:

$$h_1 = \frac{L}{N_1}, \quad h_2 = \frac{T}{N_2} \quad (48)$$

und betrachten die linearen Splines $s_{1,m_1}, s_{2,m_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$s_{1,m_1}(x) = \mathbf{1}_{[(m_1-1)h_1, (m_1+1)h_1]}(x) (1 - |xN_1 - m_1|), \quad m_1 \in \{0, \dots, N_1\} \quad (49)$$

$$s_{2,m_2}(t) = \mathbf{1}_{[(m_2-1)h_2, (m_2+1)h_2]}(t) (1 - |tN_2 - m_2|), \quad m_2 \in \{0, \dots, N_2\} \quad (50)$$

sowie die linearen Spline-Interpolierenden:

$$\varphi_{sp,i}(x, t) = \sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} \vartheta_i(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t), \quad i = 1, 2 \quad (51)$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_{sp,i}(x, t) &= \sum_{m_1=0}^{N_1} \vartheta_{i,0}(m_1 h_1) s_{1,m_1}(x) s_{2,0}(t) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_i(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (52)$$

Für die Komponenten erhalten wir mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi_{sp,1}(x, t) &= \sum_{m_1=0}^{N_1} \vartheta_{1,0}(m_1 h_1) s_{1,m_1}(x) s_{2,0}(t) + \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_{1,in}(m_2 h_2) s_{1,0}(x) s_{2,m_2}(t) \\ &\quad + \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t) \end{aligned} \quad (53)$$

und:

$$\begin{aligned} \varphi_{sp,2}(x, t) &= \sum_{m_1=0}^{N_1} \vartheta_{2,0}(m_1 h_1) s_{1,m_1}(x) s_{2,0}(t) + \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_{2,in}(m_2 h_2) s_{1,N_1}(x) s_{2,m_2}(t) \\ &+ \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_2(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t) \end{aligned} \quad (54)$$

bzw.:

$$\varphi_{sp,1}(x, t) = f_1(x, t) + \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t) \quad (55)$$

$$\varphi_{sp,2}(x, t) = f_2(x, t) + \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_2(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t) \quad (56)$$

mit:

$$f_1(x, t) = \sum_{m_1=0}^{N_1} \vartheta_{1,0}(m_1 h_1) s_{1,m_1}(x) s_{2,0}(t) + \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_{1,in}(m_2 h_2) s_{1,0}(x) s_{2,m_2}(t) \quad (57)$$

$$f_2(x, t) = \sum_{m_1=0}^{N_1} \vartheta_{2,0}(m_1 h_1) s_{1,m_1}(x) s_{2,0}(t) + \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_{2,in}(m_2 h_2) s_{1,N_1}(x) s_{2,m_2}(t) \quad (58)$$

3.3 Gleichungssystem

Einsetzen der Spline-Interpolierenden (55) + (56) für die Integranden in (47) liefert:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) &\approx \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) e^{-\frac{t}{T_i}} \vartheta_{i,0}(x - \lambda_i t) + \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) e^{-\frac{\tau_i(x)}{T_i}} \vartheta_{i,in}(t - \tau_i(x)) \\ &+ \mathbf{1}_{[0, \tau_i(x)]}(t) \frac{1}{T_i} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \varphi_{sp,j}(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_i(x), T]}(t) \frac{1}{T_i} \int_{t-\tau_i(x)}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_i}} \varphi_{sp,j}(x - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau, \\ &i, j = 1, 2, i \neq j \end{aligned} \quad (59)$$

bzw.:

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(x, t) \\ \approx &\mathbf{1}_{[0, \tau_1(x)]}(t) e^{-\frac{t}{T_1}} \vartheta_{1,0}(x - \lambda_1 t) + \mathbf{1}_{(\tau_1(x), T]}(t) e^{-\frac{\tau_1(x)}{T_1}} \vartheta_{1,in}(t - \tau_1(x)) \\ &+ \mathbf{1}_{[0, \tau_1(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} f_2(x - \lambda_1(t - \tau), \tau) d\tau \\ &+ \mathbf{1}_{(\tau_1(x), T]}(t) \int_{t-\tau_1(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} f_2(x - \lambda_1(t - \tau), \tau) d\tau \\ &+ \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_2(m_1 h_1, m_2 h_2) \left(\mathbf{1}_{[0, \tau_1(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} s_{1,m_1}(x - \lambda_1(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \right. \\ &\left. + \mathbf{1}_{(\tau_1(x), T]}(t) \int_{t-\tau_1(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} s_{1,m_1}(x - \lambda_1(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (60)$$

und:

$$\begin{aligned}
& \vartheta_2(x, t) \\
& \approx \mathbf{1}_{[0, \tau_2(x)]}(t) e^{-\frac{t}{T_2}} \vartheta_{2,0}(x - \lambda_2 t) + \mathbf{1}_{(\tau_2(x), T]}(t) e^{-\frac{\tau_2(x)}{T_2}} \vartheta_{2,in}(t - \tau_2(x)) \\
& + \mathbf{1}_{[0, \tau_2(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} f_1(x - \lambda_2(t - \tau), \tau) d\tau \\
& + \mathbf{1}_{(\tau_2(x), T]}(t) \int_{t-\tau_2(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} f_1(x - \lambda_2(t - \tau), \tau) d\tau \\
& + \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) \left(\mathbf{1}_{[0, \tau_2(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} s_{1,m_1}(x - \lambda_2(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \right. \\
& \left. + \mathbf{1}_{(\tau_2(x), T]}(t) \int_{t-\tau_2(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} s_{1,m_1}(x - \lambda_2(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \right) \quad (61)
\end{aligned}$$

Mit:

$$\begin{aligned}
b_1(x, t, m_1, m_2) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_1(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} s_{1,m_1}(x - \lambda_1(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \\
&+ \mathbf{1}_{(\tau_1(x), T]}(t) \int_{t-\tau_1(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} s_{1,m_1}(x - \lambda_1(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2(x, t, m_1, m_2) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_2(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} s_{1,m_1}(x - \lambda_2(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \\
&+ \mathbf{1}_{(\tau_2(x), T]}(t) \int_{t-\tau_2(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} s_{1,m_1}(x - \lambda_2(t - \tau)) s_{2,m_2}(\tau) d\tau \quad (63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_1(x)]}(t) e^{-\frac{t}{T_1}} \vartheta_{1,0}(x - \lambda_1 t) + \mathbf{1}_{(\tau_1(x), T]}(t) e^{-\frac{\tau_1(x)}{T_1}} \vartheta_{1,in}(t - \tau_1(x)) \\
&+ \mathbf{1}_{[0, \tau_1(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} f_2(x - \lambda_1(t - \tau), \tau) d\tau \\
&+ \mathbf{1}_{(\tau_1(x), T]}(t) \int_{t-\tau_1(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}{T_1} f_2(x - \lambda_1(t - \tau), \tau) d\tau \quad (64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(x, t) &= \mathbf{1}_{[0, \tau_2(x)]}(t) e^{-\frac{t}{T_2}} \vartheta_{2,0}(x - \lambda_2 t) + \mathbf{1}_{(\tau_2(x), T]}(t) e^{-\frac{\tau_2(x)}{T_2}} \vartheta_{2,in}(t - \tau_2(x)) \\
&+ \mathbf{1}_{[0, \tau_2(x)]}(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} f_1(x - \lambda_2(t - \tau), \tau) d\tau \\
&+ \mathbf{1}_{(\tau_2(x), T]}(t) \int_{t-\tau_2(x)}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}}{T_2} f_1(x - \lambda_2(t - \tau), \tau) d\tau \quad (65)
\end{aligned}$$

erhalten wir:

$$\vartheta_1(x, t) - \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_2(m_1 h_1, m_2 h_2) b_1(x, t, m_1, m_2) \approx g_1(x, t) \quad (66)$$

$$\vartheta_2(x, t) - \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) b_2(x, t, m_1, m_2) \approx g_2(x, t) \quad (67)$$

Für $\vartheta_1(x, t)$ werten wir dies aus in den $N_1 N_2$ Gitterpunkten:

$$\{(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) : (\mu_1, \mu_2) \in \{1, \dots, N_1\} \times \{1, \dots, N_2\}\} \quad (68)$$

und für $\vartheta_2(x, t)$ in den $N_1 N_2$ Gitterpunkten:

$$\{(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) : (\mu_1, \mu_2) \in \{0, \dots, N_1 - 1\} \times \{1, \dots, N_2\}\} \quad (69)$$

Also:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) - \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_2(m_1 h_1, m_2 h_2) b_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, m_1, m_2) &\approx g_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2), \\ \mu_1 &= 1, \dots, N_1, \mu_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) - \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) b_2(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, m_1, m_2) &\approx g_2(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2), \\ \mu_1 &= 0, \dots, N_1 - 1, \mu_2 = 1, \dots, N_2 \end{aligned} \quad (71)$$

bzw.:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) - \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_2(m_1 h_1, m_2 h_2) b_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, m_1, m_2) \\ \approx g_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2), \quad \mu_1 = 1, \dots, N_1, \mu_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2) - \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) b_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2, m_1, m_2) \\ \approx g_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2), \quad \mu_1 = 1, \dots, N_1, \mu_2 = 1, \dots, N_2 \end{aligned} \quad (73)$$

Für die $N_1 N_2$ unbekannten Werte

$$\{\vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) : (m_1, m_2) \in \{1, \dots, N_1\} \times \{1, \dots, N_2\}\} \quad (74)$$

und die $N_1 N_2$ unbekannten Werte

$$\{\vartheta_2(m_1 h_1, m_2 h_2) : (m_1, m_2) \in \{0, \dots, N_1 - 1\} \times \{1, \dots, N_2\}\} \quad (75)$$

sollen Näherungswerte bestimmt werden. Hierzu setzen wir zunächst:

$$\Theta(m_1, m_2) = \begin{cases} \vartheta_1(m_1 h_1, m_2 h_2) & , \quad m_1 \in \{1, \dots, N_1\} \\ \vartheta_2((m_1 - N_1 - 1)h_1, m_2 h_2) & , \quad m_1 \in \{N_1 + 1, \dots, 2N_1\} \end{cases} \quad (76)$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Theta(\mu_1, \mu_2) - \sum_{m_1=N_1+1}^{2N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \Theta(m_1, m_2) b_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, m_1 - N_1 - 1, m_2) \\ \approx g_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2), \quad \mu_1 = 1, \dots, N_1, \mu_2 = 1, \dots, N_2, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\mu_1 + N_1, \mu_2) - \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \Theta(m_1, m_2) b_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2, m_1, m_2) \\ \approx g_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2), \quad \mu_1 = 1, \dots, N_1, \mu_2 = 1, \dots, N_2 \end{aligned} \quad (78)$$

Mit

$$\begin{aligned} &\alpha_1(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) \\ &= \begin{cases} \delta_{\mu_1, m_1} \delta_{\mu_2, m_2} & , \quad m_1 \in \{1, \dots, N_1\} \\ -b_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, m_1 - N_1 - 1, m_2) & , \quad m_1 \in \{N_1 + 1, \dots, 2N_1\} \end{cases} \end{aligned} \quad (79)$$

und:

$$\alpha_2(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) = \begin{cases} -b_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2, m_1, m_2) & , \quad m_1 \in \{1, \dots, N_1\} \\ \delta_{\mu_1 + N_1, m_1} \delta_{\mu_2, m_2} & , \quad m_1 \in \{N_1 + 1, \dots, 2N_1\} \end{cases} \quad (80)$$

erhalten wir für $\mu_1 = 1, \dots, N_1$, $\mu_2 = 1, \dots, N_2$:

$$\sum_{m_1=1}^{2N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \Theta(m_1, m_2) \alpha_1(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) \approx g_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) \quad (81)$$

$$\sum_{m_1=1}^{2N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \Theta(m_1, m_2) \alpha_2(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) \approx g_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2) \quad (82)$$

Wir bestimmen nun Näherungswerte $\Theta_{app}(m_1, m_2)$ für $\Theta(m_1, m_2)$, indem wir in (81) und (82) Gleichheit fordern, d.h. wir betrachten das lineare Gleichungssystem:

$$\sum_{m_1=1}^{2N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \Theta_{app}(m_1, m_2) \alpha_1(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) = g_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) \quad (83)$$

$$\sum_{m_1=1}^{2N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \Theta_{app}(m_1, m_2) \alpha_2(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) = g_2((\mu_1 - 1)h_1, \mu_2 h_2) \quad (84)$$

$$\mu_1 = 1, \dots, N_1 \quad (85)$$

$$\mu_2 = 1, \dots, N_2 \quad (86)$$

Dies sind $2N_1 N_2$ Gleichungen zur Bestimmung der $2N_1 N_2$ Werte:

$$\left\{ \Theta_{app}(m_1, m_2) : (m_1, m_2) \in \{1, \dots, 2N_1\} \times \{1, \dots, N_2\} \right\} \quad (87)$$

3.4 Transformation des Gleichungssystems

Um das LGS in gewohnter Form darzustellen, transformieren wir das $2D$ Gitter

$$M = \left\{ (m_1, m_2) : m_1 \in \{1, \dots, 2N_1\}, m_2 \in \{1, \dots, N_2\} \right\} \quad (88)$$

auf ein $1D$ Gitter. Zur Nummerierung der Gitterpunkte wählen wir eine lexikographische Anordnung, d.h. wir nummerieren Linie für Linie durch. Hierzu definieren wir

$$p : \{1, \dots, 2N_1 N_2\} \rightarrow \{1, \dots, 2N_1\} \times \{1, \dots, N_2\} \quad (89)$$

durch:

$$p(k) = \left(\begin{array}{c} \text{Mod}(k - 1, 2N_1) + 1 \\ \text{Quotient}(k - 1, 2N_1) + 1 \end{array} \right) \quad (90)$$

Dabei bezeichnet $\text{Mod}(m, n)$ den Rest bei der Division m/n , und $\text{Quotient}(m, n)$ liefert den ganzzahligen Anteil, d.h.: $m = \text{Quotient}(m, n) n + \text{Mod}(m, n)$. Die Nummerierung kann dem folgenden Schema leicht entnommen werden:

$$\begin{array}{ccccc} (N_2 - 1)2N_1 + 1 & (N_2 - 1)2N_1 + 2 & \dots & N_2 2N_1 - 1 & N_2 2N_1 \\ (N_2 - 2)2N_1 + 1 & (N_2 - 2)2N_1 + 2 & \dots & (N_2 - 1)2N_1 - 1 & (N_2 - 1)2N_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ j 2N_1 + 1 & j 2N_1 + 2 & \dots & (j + 1) 2N_1 - 1 & (j + 1) 2N_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2N_1 + 1 & 2N_1 + 2 & \dots & 2 \cdot 2N_1 - 1 & 2 \cdot 2N_1 \\ 1 & 2 & \dots & 2N_1 - 1 & 2N_1 \end{array}$$

Satz 5. Die Funktion p ist bijektiv und die Umkehrfunktion

$$p^{-1} : \{1, \dots, 2N_1\} \times \{1, \dots, N_2\} \rightarrow \{1, \dots, 2N_1N_2\} \quad (91)$$

ist gegeben durch:

$$p^{-1}(m_1, m_2) = (m_2 - 1) 2N_1 + m_1 \quad (92)$$

Beweis. Es gilt: $p \circ p^{-1} = id_{\{1, \dots, 2N_1\} \times \{1, \dots, N_2\}}$ und $p^{-1} \circ p = id_{\{1, \dots, 2N_1N_2\}}$. Dies bedeutet, p ist bijektiv und p^{-1} ist die eindeutig bestimmte Umkehrfunktion. $\square$

3.5 Darstellung des Gleichungssystems

Das LGS kann nun geschrieben werden in der Form:

$$\sum_{k=1}^{2N_1N_2} \Theta_{app}(p_1(k), p_2(k)) \alpha_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, p_1(k), p_2(k)) = g_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) \quad (93)$$

$$\sum_{k=1}^{2N_1N_2} \Theta_{app}(p_1(k), p_2(k)) \alpha_2(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, p_1(k), p_2(k)) = g_2((\mu_1 - 1) h_1, \mu_2 h_2) \quad (94)$$

$$\mu_1 = 1, \dots, N_1 \quad (95)$$

$$\mu_2 = 1, \dots, N_2 \quad (96)$$

Wir setzen:

$$\alpha(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) = \begin{cases} \alpha_1(\mu_1, \mu_2, m_1, m_2) & , \quad \mu_1 = 1, \dots, N_1 \\ \alpha_2(\mu_1 - N_1, \mu_2, m_1, m_2) & , \quad \mu_1 = N_1 + 1, \dots, 2N_1 \end{cases} \quad (97)$$

Weiterhin sei:

$$g(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} g_1(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) & , \quad \mu_1 = 1, \dots, N_1 \\ g_2((\mu_1 - N_1 - 1) h_1, \mu_2 h_2) & , \quad \mu_1 = N_1 + 1, \dots, 2N_1 \end{cases} \quad (98)$$

Hiermit erhalten wir nun das LGS in der Form:

$$\sum_{k=1}^{2N_1N_2} \alpha(p_1(i), p_2(i), p_1(k), p_2(k)) \Theta_{app}(p_1(k), p_2(k)) = g(p_1(i), p_2(i)) \quad (99)$$

$$i = 1, \dots, 2N_1N_2 \quad (100)$$

3.6 Approximationen

Ist das LGS gelöst, so erhält man dann durch

$$\varphi_1(m_1 h_1, m_2 h_2) = \Theta_{app}(m_1, m_2) \quad (101)$$

$$\varphi_2(m_1 h_1, m_2 h_2) = \Theta_{app}(m_1 + N_1 + 1, m_2) \quad (102)$$

Näherungswerte für ϑ_1 und ϑ_2 in den Gitterpunkten. Die Approximationen $\vartheta_{1,app}(x, t)$ und $\vartheta_{2,app}(x, t)$ definieren wir nun durch:

$$\vartheta_{1,app}(x, t) = f_1(x, t) + \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \varphi_1(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t) \quad (103)$$

$$\vartheta_{2,app}(x, t) = f_2(x, t) + \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \varphi_2(m_1 h_1, m_2 h_2) s_{1,m_1}(x) s_{2,m_2}(t) \quad (104)$$

Es gilt dann $\vartheta_{i,app}(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2) = \varphi_i(\mu_1 h_1, \mu_2 h_2)$ in den Gitterpunkten.

4 Validierung

4.1 Benchmark Lösung

Zur Validierung des Approximationsverfahrens ist es wünschenswert, eine exakte Lösung zur Verfügung zu haben, die mit der approximativen Lösung verglichen werden kann. Da für den allgemeinen Fall keine exakte Lösung zur Verfügung steht, werden wir hier für einen Spezialfall eine exakte Lösung als Benchmark Lösung konstruieren.

4.1.1 Stationäre Lösung

Wir betrachten hier den Fall konstanter Eintrittstemperaturen sowie das unbeschränkte Intervall $[0, \infty)$ anstelle des beschränkten Intervalls $[0, T]$. In diesem Fall können wir das Verhalten für $t \rightarrow \infty$ untersuchen. Es sei ϑ eine klassische Lösung von (1) - (6), die für alle $t \in [0, \infty)$ existiert. Aufgrund der konstanten Eintrittstemperaturen können wir annehmen, dass für $t \rightarrow \infty$ die Zeitableitungen verschwinden und definieren:

$$u_1(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta_1(x, t), \quad u_2(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta_2(x, t) \quad (105)$$

Von (1) - (6) erhalten wir dann, dass $u = (u_1, u_2)^T$ eine klassische Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

$$v_1 T_1 \frac{du_1(x)}{dx} = u_2(x) - u_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (106)$$

$$v_2 T_2 \frac{du_2(x)}{dx} = u_2(x) - u_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (107)$$

$$u_1(0) = \vartheta_{1,in} \quad (108)$$

$$u_2(L) = \vartheta_{2,in} \quad (109)$$

Dieses Randwertproblem besitzt die wohlbekannte, eindeutig bestimmte Lösung:

$$u_1(x) = \begin{cases} \vartheta_{1,in} - \frac{\vartheta_{1,in} - \vartheta_{2,in}}{L + v_1 T_1} x & , \quad \eta = 0 \\ \vartheta_{1,in} - \frac{\vartheta_{1,in} - \vartheta_{2,in}}{1 - \frac{v_1 T_1}{v_2 T_2} e^{-\eta L}} (1 - e^{-\eta x}) & , \quad \eta \neq 0 \end{cases} \quad (110)$$

$$u_2(x) = \begin{cases} \vartheta_{1,in} - \frac{\vartheta_{1,in} - \vartheta_{2,in}}{L + v_1 T_1} (v_1 T_1 + x) & , \quad \eta = 0 \\ \vartheta_{1,in} - \frac{\vartheta_{1,in} - \vartheta_{2,in}}{1 - \frac{v_1 T_1}{v_2 T_2} e^{-\eta L}} \left(1 - \frac{v_1 T_1}{v_2 T_2} e^{-\eta x}\right) & , \quad \eta \neq 0 \end{cases} \quad (111)$$

mit:

$$\eta = \frac{1}{v_1 T_1} - \frac{1}{v_2 T_2} \quad (112)$$

4.1.2 Konstruktion einer Benchmark Lösung

Wir suchen nach Lösungen der Form:

$$\vartheta(x, t) = u(x) + e^{\alpha x + \beta t} y(x) \quad (113)$$

mit der stationären Lösung u . Für $i = 1, 2$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial x} &= \frac{du_i(x)}{dx} + \alpha e^{\alpha x + \beta t} y_i(x) + e^{\alpha x + \beta t} \frac{dy_i(x)}{dx} \\ \frac{\partial \vartheta_i(x, t)}{\partial t} &= \beta e^{\alpha x + \beta t} y_i(x) \end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vartheta_1(x, t) + v_1 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_1(x, t) + \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_1} &= e^{\alpha x + \beta t} \left(\left(\beta + v_1 \alpha + \frac{1}{T_1} \right) y_1(x) \right. \\ &\quad \left. + v_1 \frac{dy_1(x)}{dx} - \frac{y_2(x)}{T_1} \right) \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vartheta_2(x, t) - v_2 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2(x, t) - \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_2} &= e^{\alpha x + \beta t} \left(\left(\beta - v_2 \alpha + \frac{1}{T_2} \right) y_2(x) \right. \\ &\quad \left. - v_2 \frac{dy_2(x)}{dx} - \frac{y_1(x)}{T_2} \right) \end{aligned} \quad (115)$$

Dies bedeutet, (113) liefert eine Lösung des Randwertproblems (1) + (1) + (5) + (6) genau dann, wenn y eine Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

$$v_1 \frac{dy_1(x)}{dx} = \frac{y_2(x)}{T_1}, \quad v_2 \frac{dy_2(x)}{dx} = -\frac{y_1(x)}{T_2}, \quad y_1(0) = y_2(L) = 0 \quad (116)$$

und (α, β) eine Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\beta + v_1 \alpha + \frac{1}{T_1} = 0, \quad \beta - v_2 \alpha + \frac{1}{T_2} = 0 \quad (117)$$

Die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ist gegeben durch:

$$\alpha = \frac{T_1 - T_2}{(v_1 + v_2)T_1 T_2}, \quad \beta = -\frac{v_1 T_1 + v_2 T_2}{(v_1 + v_2)T_1 T_2} \quad (118)$$

Satz 6. (*Benchmark Lösung*) Wir setzen:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2 T_1 T_2}} \quad (119)$$

Existiert eine Zahl $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$\omega_0 L = \frac{\pi}{2} + m \pi, \quad (120)$$

so ist für beliebige Konstanten C durch

$$\vartheta_1(x, t) = u_1(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2)T_1 T_2}} C \sin(\omega_0 x) \quad (121)$$

$$\vartheta_2(x, t) = u_2(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2)T_1 T_2}} C \sqrt{\frac{v_1 T_1}{v_2 T_2}} \cos(\omega_0 x) \quad (122)$$

eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) mit den speziellen Anfangsprofilen

$$\vartheta_{1,0}(x) = u_1(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x}{(v_1 + v_2)T_1 T_2}} C \sin(\omega_0 x) \quad (123)$$

$$\vartheta_{2,0}(x) = u_2(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x}{(v_1 + v_2)T_1 T_2}} C \sqrt{\frac{v_1 T_1}{v_2 T_2}} \cos(\omega_0 x) \quad (124)$$

gegeben.

Beweis. Der Beweis folgt aus der oben durchgeführten Analyse. $\square$

4.2 Linienmethode

Zum Vergleich des Approximationsverfahrens mit einer anderen numerischen Methode betrachten wir hier eine Linienmethode [15] (Method of Lines - MOL). Wir konstruieren dabei eine numerische Lösung mit einer Semi-Diskretisierung, indem nur die räumliche Variable x diskretisiert wird.

Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung des Raumintervalls $[0, L]$ mit der Schrittweite Δx und erhalten:

$$x_i = i \Delta x, \quad i = 0, \dots, N, \quad \Delta x = \frac{L}{N}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (125)$$

Da auf der Primärseite der Randwert im Punkt $x = 0$ und auf der Sekundärseite der Randwert im Punkt $x = L$ gegeben sind, approximieren wir die räumliche Ableitung von ϑ_1 durch eine Rückwärtsdifferenz und die räumliche Ableitung von ϑ_2 durch eine Vorwärtsdifferenz. Wir erhalten:

$$\frac{\partial \vartheta_1(x_i, t)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta_1(x_i, t) - \vartheta_1(x_{i-1}, t)}{\Delta x}, \quad i = 1, \dots, N \quad (126)$$

$$\frac{\partial \vartheta_2(x_i, t)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta_2(x_{i+1}, t) - \vartheta_2(x_i, t)}{\Delta x}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (127)$$

Das PDE System (1) + (2) liefert nun:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \vartheta_{1,MOL}(x_i, t) + v_1 \left(\frac{\vartheta_{1,MOL}(x_i, t) - \vartheta_{1,MOL}(x_{i-1}, t)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\vartheta_{2,MOL}(x_i, t) - \vartheta_{1,MOL}(x_i, t)}{T_1}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \vartheta_{2,MOL}(x_i, t) - v_2 \left(\frac{\vartheta_{2,MOL}(x_{i+1}, t) - \vartheta_{2,MOL}(x_i, t)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\vartheta_{1,MOL}(x_i, t) - \vartheta_{2,MOL}(x_i, t)}{T_2}, \quad i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (129)$$

Hierbei bezeichnen $\vartheta_{1,MOL}(x_i, t)$ und $\vartheta_{2,MOL}(x_i, t)$ die Approximationen der Werte $\vartheta_1(x_i, t)$ und $\vartheta_2(x_i, t)$ durch die MOL Methode. Die Anfangsbedingungen (3) + (4) führen zu:

$$\vartheta_{1,MOL}(x_i, 0) = \vartheta_{1,0}(x_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (130)$$

$$\vartheta_{2,MOL}(x_i, 0) = \vartheta_{2,0}(x_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (131)$$

und aus den Randbedingungen (5) + (6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{1,MOL}(x_1, t) &= - \left(\frac{1}{T_1} + \frac{v_1}{\Delta x} \right) \vartheta_{1,MOL}(x_1, t) + \frac{v_1}{\Delta x} \vartheta_{1,in}(t) \\ &\quad + \frac{1}{T_1} \vartheta_{2,MOL}(x_1, t) \end{aligned} \quad (132)$$

sowie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{2,MOL}(x_{N-1}, t) &= - \left(\frac{1}{T_2} + \frac{v_2}{\Delta x} \right) \vartheta_{2,MOL}(x_{N-1}, t) + \frac{v_2}{\Delta x} \vartheta_{2,in}(t) \\ &\quad + \frac{1}{T_2} \vartheta_{1,MOL}(x_{N-1}, t) \end{aligned} \quad (133)$$

Schließlich erhalten wir für die inneren Punkte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{1,MOL}(x_i, t) &= - \left(\frac{1}{T_1} + \frac{v_1}{\Delta x} \right) \vartheta_{1,MOL}(x_i, t) + \frac{v_1}{\Delta x} \vartheta_{1,MOL}(x_{i-1}, t) \\ &\quad + \frac{1}{T_1} \vartheta_{2,MOL}(x_i, t), \quad i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{2,MOL}(x_i, t) &= - \left(\frac{1}{T_2} + \frac{v_2}{\Delta x} \right) \vartheta_{2,MOL}(x_i, t) + \frac{v_2}{\Delta x} \vartheta_{2,MOL}(x_{i+1}, t) \\ &\quad + \frac{1}{T_2} \vartheta_{1,MOL}(x_i, t), \quad i = 0, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (135)$$

Die Gleichungen (130) - (135) liefern ein Anfangswertproblem für die MOL Lösung. Setzen wir:

$$a_{jk} = \begin{cases} - \left(\frac{1}{T_1} + \frac{v_1}{\Delta x} \right) & , \quad k = j \wedge j \in \{1, \dots, N\} \\ - \left(\frac{1}{T_2} + \frac{v_2}{\Delta x} \right) & , \quad k = j \wedge j \in \{N+1, \dots, 2N\} \\ \frac{v_1}{\Delta x} & , \quad k = j-1 \wedge j \in \{2, \dots, N\} \\ \frac{v_2}{\Delta x} & , \quad k = j+1 \wedge j \in \{N+1, \dots, 2N-1\} \\ \frac{1}{T_1} & , \quad k = j+N \wedge j \in \{1, \dots, N\} \\ \frac{1}{T_2} & , \quad k = j-N \wedge j \in \{N+1, \dots, 2N\} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (136)$$

und:

$$z_i(t) = \begin{cases} \vartheta_{1,MOL}(x_i, t) & , \quad i \in \{1, \dots, N\} \\ \vartheta_{2,MOL}(x_{i-N-1}, t) & , \quad i \in \{N+1, \dots, 2N\} \end{cases} \quad (137)$$

sowie:

$$b_i(t) = \begin{cases} \frac{v_1}{\Delta x} \vartheta_{1,in}(t) & , \quad i = 1 \\ \frac{v_2}{\Delta x} \vartheta_{2,in}(t) & , \quad i = 2N \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (138)$$

$$c_i = \begin{cases} \vartheta_{1,0}(x_i) & , \quad i \in \{1, \dots, N\} \\ \vartheta_{2,0}(x_{i-N-1}) & , \quad i \in \{N+1, \dots, 2N\} \end{cases} \quad (139)$$

kann das Anfangswertproblem (130) - (135) geschrieben werden in der Form:

$$\frac{d}{dt} z(t) = A z(t) + b(t), \quad z(0) = c \quad (140)$$

mit:

$$z(t) = (z_i(t))_{i=1, \dots, 2N} \quad (141)$$

$$A = (a_{jk})_{j,k=1, \dots, 2N} \quad (142)$$

$$b(t) = (b_i(t))_{i=1, \dots, 2N} \quad (143)$$

$$c = (c_i)_{i=1, \dots, 2N} \quad (144)$$

4.3 Numerisches Beispiel

In diesem Abschnitt behandeln wir ein numerisches Beispiel, bei dem wir eine exakte (klassische) Benchmark Lösung mit der approximativen Lösung und der MOL Lösung der Linienmethode vergleichen. Alle Berechnungen wurden mit der Software Mathematica Version 13.3 durchgeführt. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems (140) wurde die NDSolve Routine verwendet.

Wir betrachten einen Gegenstrom-Wärmetauscher mit den folgenden Daten:

$$\vartheta_{1,in} = 60^\circ\text{C}, \quad \vartheta_{2,in} = 20^\circ\text{C}, \quad T_1 = \frac{T}{10}, \quad T_2 = \frac{T}{8} \quad (145)$$

sowie:

$$v_1 = 8 \frac{L}{T}, \quad v_2 = \frac{4 L^2}{\pi^2 v_1 T_1 T_2} \quad (146)$$

Die stationäre Lösung ist hier gegeben durch:

$$u_1(x) = 60^\circ\text{C} - 40^\circ\text{C} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{5}\right) \frac{x}{L}}}{1 - \frac{4\pi^2}{25} e^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{5}\right) \frac{x}{L}}} \right) \quad (147)$$

$$u_2(x) = 60^\circ\text{C} - 40^\circ\text{C} \left(\frac{1 - \frac{4\pi^2}{25} e^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{5}\right) \frac{x}{L}}}{1 - \frac{4\pi^2}{25} e^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{5}\right) \frac{x}{L}}} \right) \quad (148)$$

Wegen

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2 T_1 T_2}} = \frac{\pi}{2L} \quad (149)$$

ist die Bedingung (120) erfüllt. Satz 6 liefert nun, dass für beliebige Konstanten C durch (121) + (122) eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) mit den speziellen Anfangsbedingungen

$$\vartheta_{i,0}(x) = \vartheta_i(x, 0), \quad i = 1, 2 \quad (150)$$

gegeben ist. Für die Konstante C wählen wir den Wert $C = -20^\circ\text{C}$ und erhalten für die klassische Lösung die Darstellung:

$$\vartheta_1(x, t) = u_1(x) - 20^\circ\text{C} e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2+5)} \frac{x}{L} - \left(\frac{8\pi^2+50}{\pi^2+5}\right) \frac{t}{T}} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (151)$$

$$\vartheta_2(x, t) = u_2(x) - 8\pi^\circ\text{C} e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2+5)} \frac{x}{L} - \left(\frac{8\pi^2+50}{\pi^2+5}\right) \frac{t}{T}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (152)$$

und somit die Anfangsprofile:

$$\vartheta_{1,0}(x) = u_1(x) - 20^\circ\text{C} e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2+5)} \frac{x}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (153)$$

$$\vartheta_{2,0}(x) = u_2(x) - 8\pi^\circ\text{C} e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2+5)} \frac{x}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (154)$$

Um die Lösungen in 2D Plots darzustellen, betrachten wir die folgenden Referenzpunkte:

$$x_j = j \frac{L}{10}, \quad j = 0, \dots, 10 \quad (155)$$

Abbildung 1 zeigt im Ortsintervall $[0, L]$ die stationäre Lösung (147) + (148) sowie die Anfangsprofile (153) + (154). In Abbildung 2 ist die klassische (exakte) Lösung (151) + (152) für $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ zu sehen und in Abbildung 3 ist die exakte Lösung in allen Referenzpunkten von (155) im Zeitintervall $[0, T]$ dargestellt.

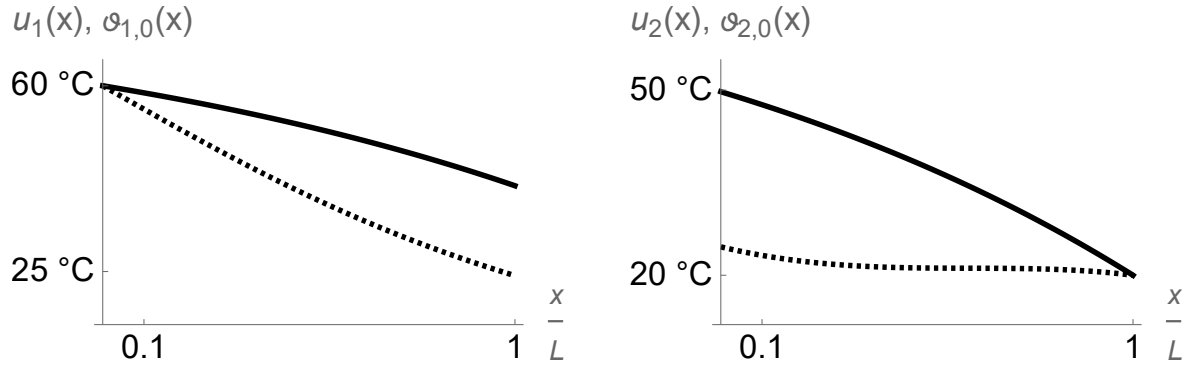


Abbildung 1: Stationäre Lösung und Anfangsprofile (gestrichelt) auf der Primärseite (links) und auf der Sekundärseite (rechts) im Ortsintervall $[0, L]$.

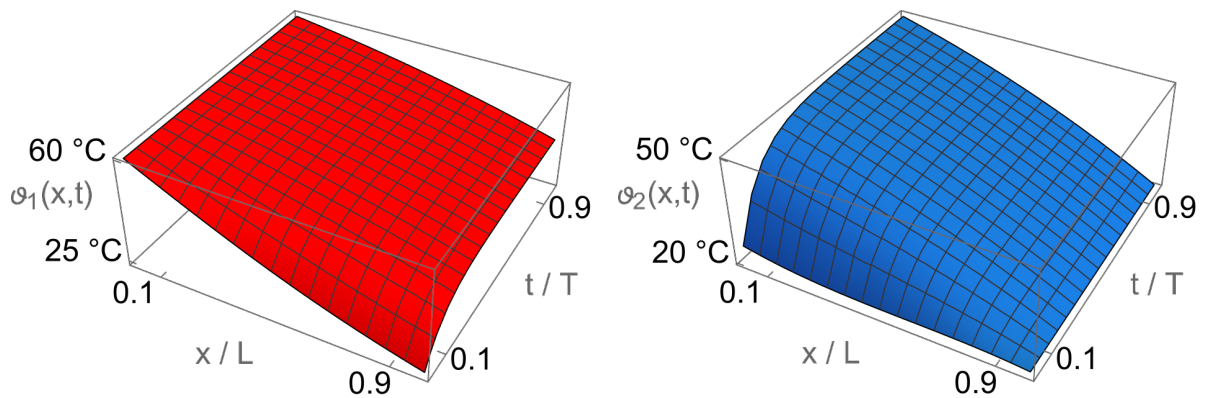


Abbildung 2: Klassische Lösung auf der Primärseite (links) und auf der Sekundärseite (rechts) für $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$.

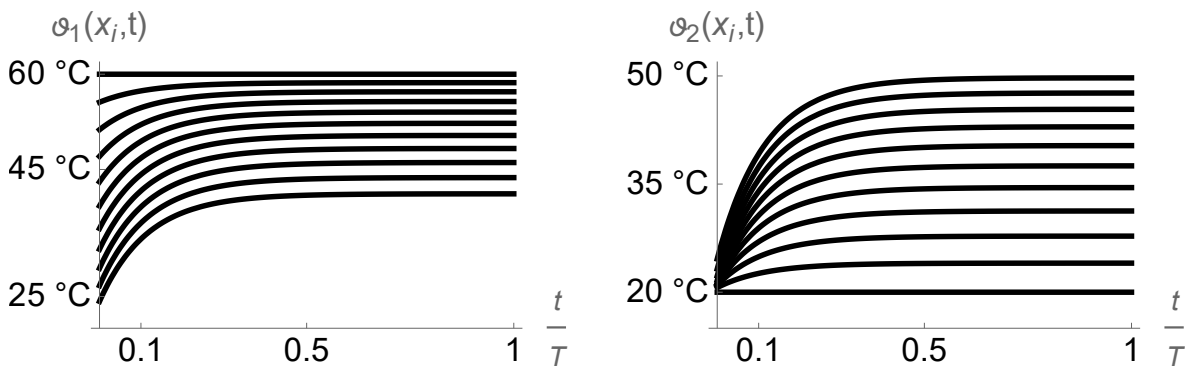


Abbildung 3: Klassische Lösung auf der Primärseite (links) und auf der Sekundärseite (rechts) für alle Referenzpunkte von (155) im Zeitintervall $[0, T]$.

Da bei den Austrittstemperaturen ($x = L$ auf der Primärseite und $x = 0$ auf der Sekundärseite) der größte Fehler zu erwarten ist, werden in Abbildung 4 an diesen Stellen die Werte der exakten Lösung verglichen mit der approximativen Lösung (gestrichelt) für $N_1 = 2$ und $N_2 = 2, 4, 6, 8$.

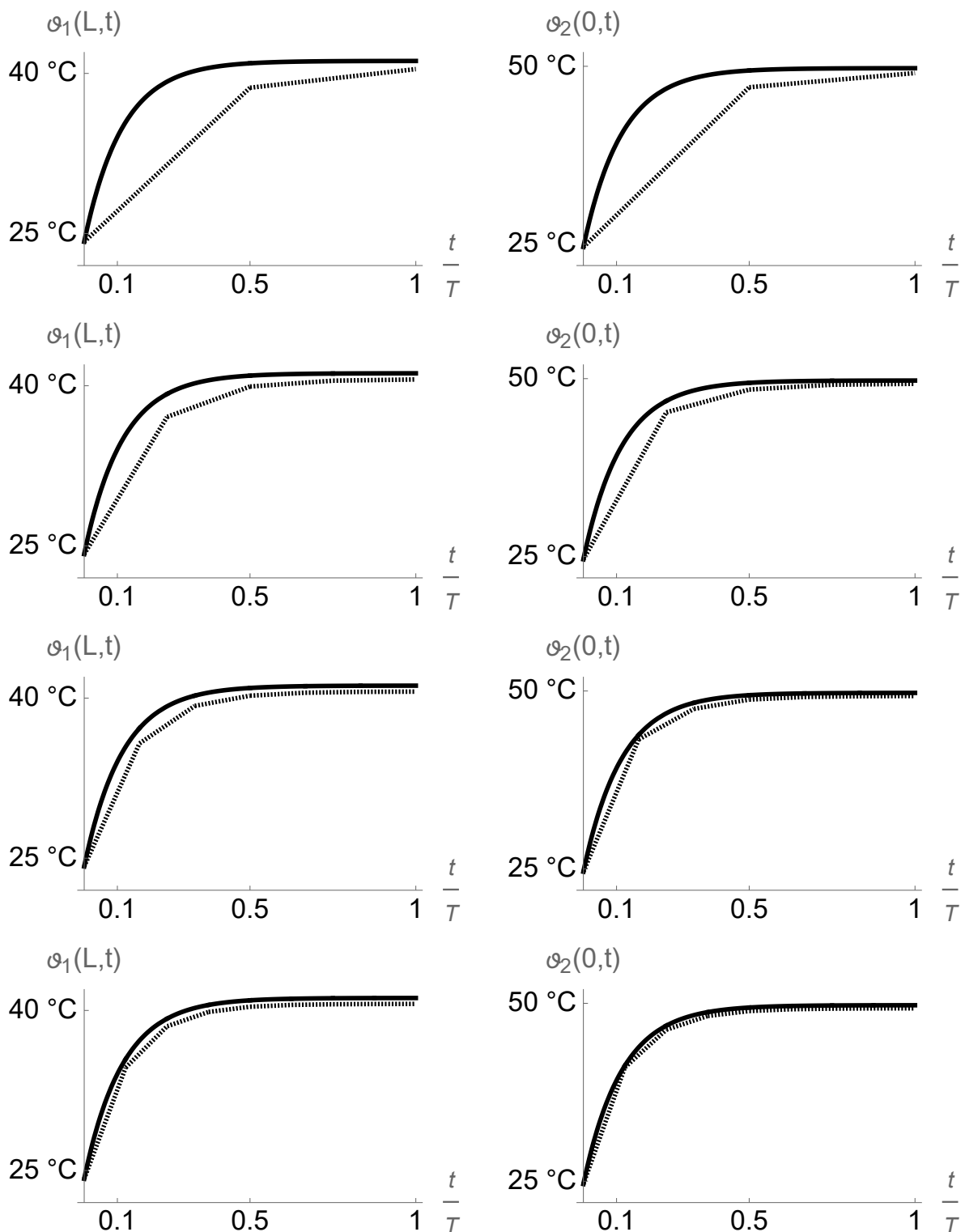


Abbildung 4: Austrittstemperaturen der klassischen (exakten) Lösung verglichen mit der approximativen Lösung (gestrichelt) auf der Primärseite (links) und auf der Sekundärseite (rechts) für $N_1 = 2$ und $N_2 = 2$ (oben), $N_2 = 4$ (zweite Reihe), $N_2 = 6$ (dritte Reihe) und $N_2 = 8$ (unten) im Zeitintervall $[0, T]$.

Obwohl mit $N_1 = 2$ eine sehr grobe Ortsdiskretisierung vorliegt, ist zu erkennen, dass für wachsendes N_2 sich die approximative Lösung schon sehr gut an die exakte Lösung annähert. In Abbildung 5 werden die Austrittstemperaturen der exakten Lösung verglichen mit der MOL Lösung (gestrichelt) für $N = 2, 4, 6, 8$. Es ist zu erkennen, dass sich für wachsendes N die MOL Lösung an die exakte Lösung annähert.

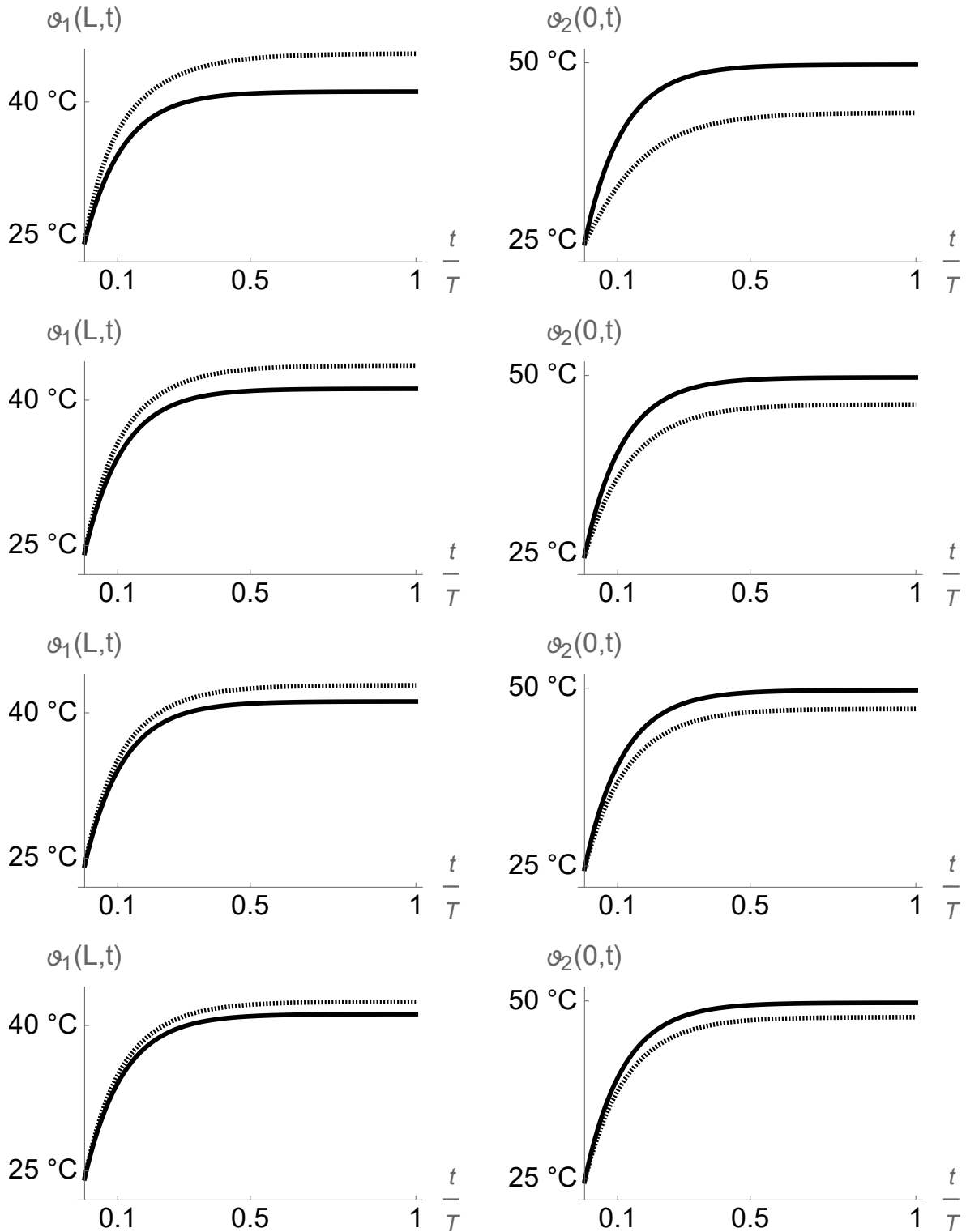


Abbildung 5: Austrittstemperaturen der klassischen (exakten) Lösung verglichen mit der MOL Lösung (gestrichelt) auf der Primärseite (links) und auf der Sekundärseite (rechts) für $N = 2$ (oben), $N = 4$ (zweite Reihe), $N = 6$ (dritte Reihe) und $N = 8$ (unten) im Zeitintervall $[0, T]$.

Für einen besseren Vergleich der exakten Lösung mit der approximativen Lösung und der MOL Lösung, führen wir weiterhin die folgenden Fehler ein:

$$e_{i,app,N_1,N_2}(x,t) = \frac{|\vartheta_i(x,t) - \vartheta_{i,app}(x,t)|}{K}, \quad i = 1, 2 \quad (156)$$

$$e_{i,MOL,N}(x,t) = \frac{|\vartheta_i(x,t) - \vartheta_{i,MOL}(x,t)|}{K}, \quad i = 1, 2 \quad (157)$$

Wie üblich werden hier Temperaturdifferenzen mit Kelvin (K) statt mit Grad Celsius bezeichnet. Es ist zu beachten, dass die Zeitintegration des Anfangswertproblems (140) von der NDSolve Routine in Mathematica durchgeführt wird.

In Abbildung 6 bzw. Abbildung 7 sind die Fehler $e_{1,app,5,20}(x_j,t)$ und $e_{2,app,5,20}(x_j,t)$ bzw. die Fehler $e_{1,MOL,20}(x_j,t)$ und $e_{2,MOL,20}(x_j,t)$ für $j = 1, 5, 10$ auf der Primärseite sowie $j = 0, 5, 9$ auf der Sekundärseite im Zeitintervall $[0, T]$ zu sehen.

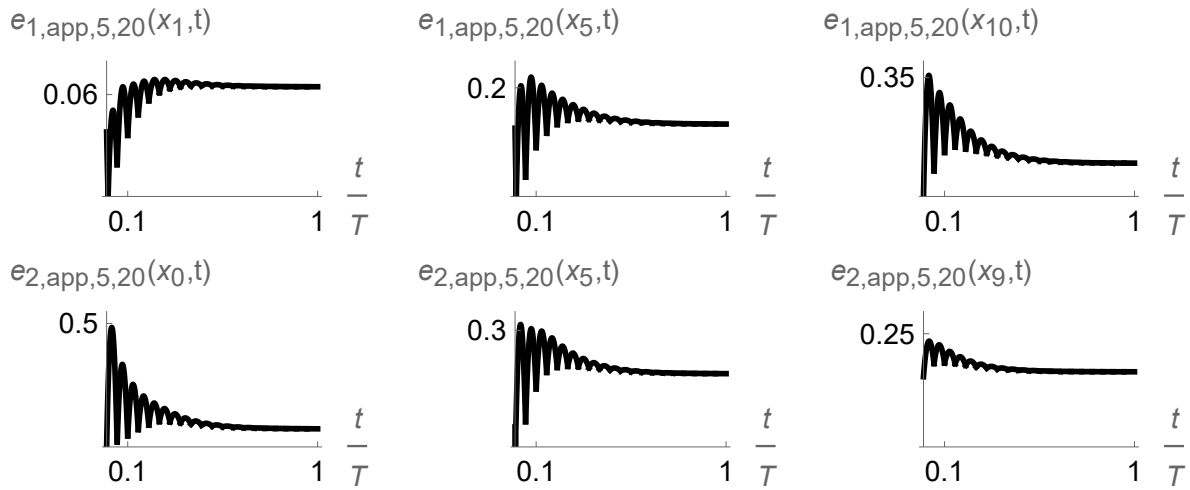


Abbildung 6: Fehler der approximativen Lösung für $N_1 = 5$ und $N_2 = 20$ in den Punkten x_1, x_5, x_{10} auf der Primärseite sowie x_0, x_5, x_9 auf der Sekundärseite im Zeitintervall $[0, T]$.

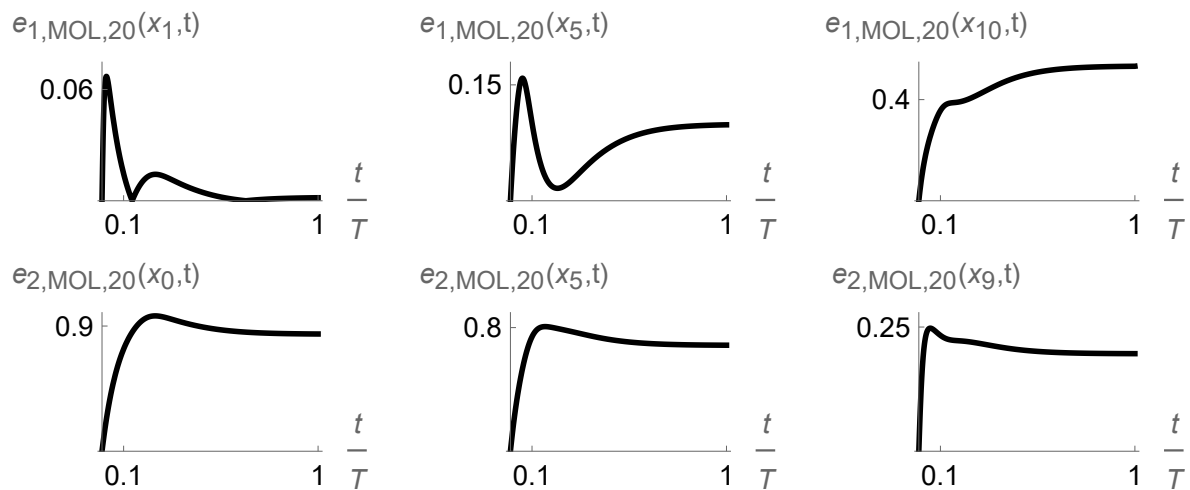


Abbildung 7: Fehler der MOL Lösung für $N = 20$ in den Punkten x_1, x_5, x_{10} auf der Primärseite sowie x_0, x_5, x_9 auf der Sekundärseite im Zeitintervall $[0, T]$.

Die Fehlerverläufe der beiden Verfahren in den Abbildungen 6 und 7 zeigen unterschiedliches Verhalten. Dabei wurde für die MOL Methode der Wert von N so gewählt, dass die maximalen Fehler näherungsweise gleich sind.

In Abbildung 8 bzw. Abbildung 9 sind die Fehler $e_{1,app,10,50}(x_j, t)$ und $e_{2,app,10,50}(x_j, t)$ bzw. die Fehler $e_{1,MOL,200}(x_j, t)$ und $e_{2,MOL,200}(x_j, t)$ für $j = 1, 5, 10$ auf der Primärseite sowie $j = 0, 5, 9$ auf der Sekundärseite im Zeitintervall $[0, T]$ zu sehen.

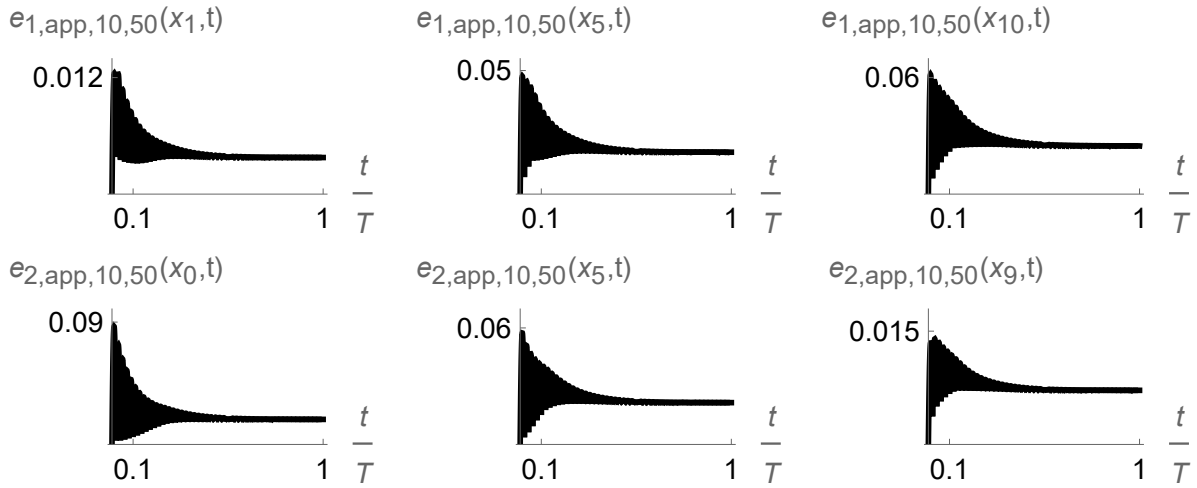


Abbildung 8: Fehler der approximativen Lösung für $N_1 = 10$ und $N_2 = 50$ in den Punkten x_1, x_5, x_{10} auf der Primärseite sowie x_0, x_5, x_9 auf der Sekundärseite im Zeitintervall $[0, T]$.

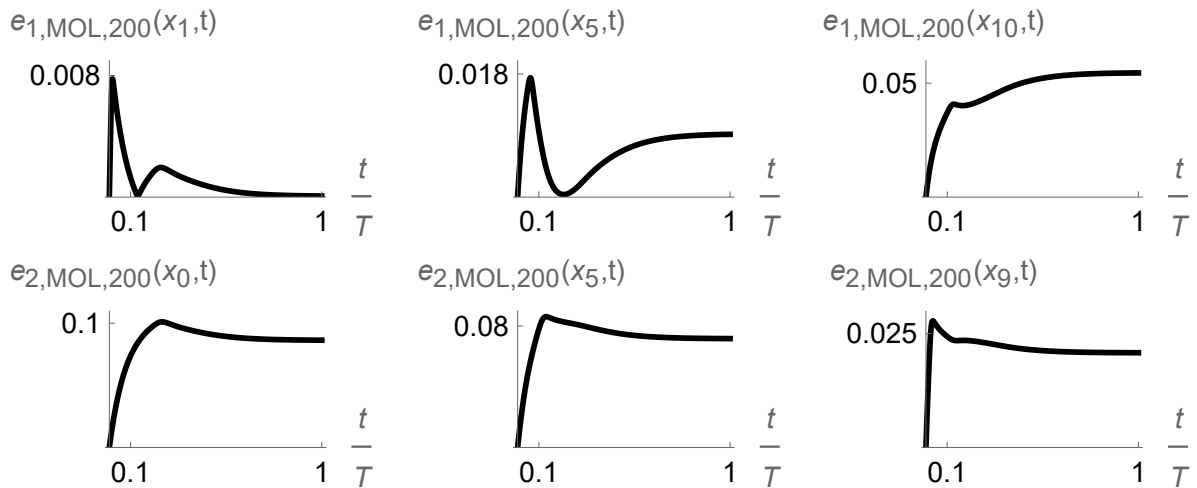


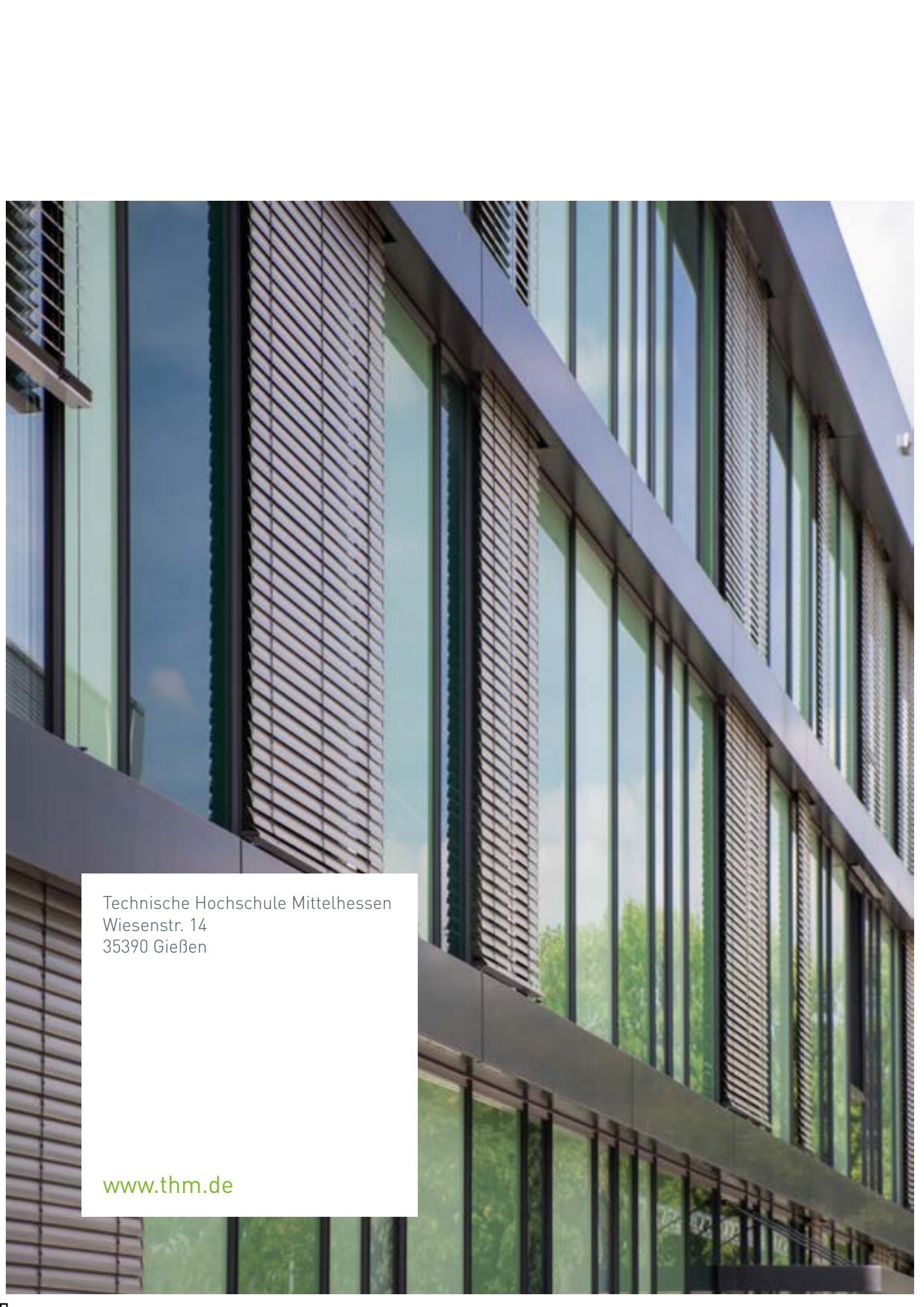
Abbildung 9: Fehler der MOL Lösung für $N = 200$ in den Punkten x_1, x_5, x_{10} auf der Primärseite sowie x_0, x_5, x_9 auf der Sekundärseite im Zeitintervall $[0, T]$.

Die Fehlerverläufe haben in den Abbildungen 8 und 9 qualitativ wieder das gleiche Aussehen wie in den Abbildungen 6 und 7. Ein Vergleich der Abbildungen 6 und 7 mit 8 und 9 lässt erkennen, dass die approximative Lösung bezüglich der räumlichen Diskretisierung schneller konvergiert als die MOL Methode.

Literatur

- [1] A. Bressan (2000), *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 20, Oxford University Press, New York.
- [2] A. Bressan, D. Serre, M. Williams, K. Zumbrun (2007), *Hyperbolic Systems of Balance Laws*, Springer, Berlin Heidelberg.
- [3] L.C. Evans (1998), *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS, Providence, Rhode Island, Second Edition, Reprint 2022.
- [4] G.B. Folland (1995), *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton (New Jersey).
- [5] M.A. Jaswon, W. Smith (1954), Countercurrent transfer processes in the non-steady state, *Proceedings of the Royal Society*, 226 - 244.
- [6] M. Abramowitz, I.A. Stegun (1964), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, New York, Reprint 2014.
- [7] A. Zavala-Rio, R. Santiesteban-Cos (2007), Reliable compartmental models for double-pipe heat exchangers: An analytical study, *Applied Mathematical Modelling* 31, 1739 - 1752.
- [8] A. Zavala-Rio, R. Santiesteban-Cos (2004), Qualitatively reliable compartmental models for double-pipe heat exchangers, *IFAC System, Structure and Control*, Oaxaca, Mexico, USA.
- [9] K. Huhtala, L. Paunonen (2019), Robust Output Regulation of Counter Flow Heat Exchangers, *IFAC PapersOnLine* 52(2), 201 - 206.
- [10] D.D. Gvozdenac (1987), Analytical Solution of Transient Response of Gas-to-Gas Parallel and Counterflow Heat Exchangers, *J. Heat Transfer* 109(4), 848 - 855.
- [11] D.D. Gvozdenac (1993), Analytical solution for transient response of counter flow heat exchanger with finite wall capacitance, *Heat and Mass Transfer* 28, 351 - 356.
- [12] R. Kress (2014), *Linear Integral Equations*, Third Edition, Springer, New York Heidelberg Dordrecht London.
- [13] Frank Müller, Werner Varnhorn (2011). On approximation and numerical solution of Fredholm integral equations of second kind using quasi-interpolation, *Applied Mathematics and Computation*, 217(13), 6409 - 6416, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.022>.
- [14] T. Kreuzinger, M. Bitzer, W. Marquardt (2008), Mathematical modelling of a domestic heating system with stratified storage tank, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 14(3), 231 - 248.
- [15] W.E. Schiesser (1991), *The Numerical Method of Lines. Integration of Partial Differential Equations*, Academic Press, San Diego.
- [16] A.L. Nash, A. Badithela, N. Jain (2017), Dynamic modelling of a sensible thermal energy storage tank with an immersed coil heat exchanger under three operation modes, *Applied Energy* 195, 877 - 889.

- [17] S.V. Patankar (1980), Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York.
- [18] R. LeVeque (1992), Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [19] K.M. Powell, T.F. Edgar (2013), An adaptive-grid model for dynamic simulation of thermocline thermal energy storage systems, Energy Conservation and Management 76, 865 - 873.
- [20] M.A. Wagner, T. Meurer, A. Kugi (2010), Trajectory planning for semilinear PDEs modeling a countercurrent heat exchanger, IFAC Proceedings 43(14), 593 – 598.
- [21] Frank Müller (2021), Approximating the solution of the discharging process in a domestic hot water storage tank, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems 27(1), 141–161, <https://doi.org/10.1080/13873954.2021.1887277>.
- [22] Frank Müller (2023), Verallgemeinerte Lösungen für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher, THM Hochschulschriften 23, TH Mittelhessen, Gießen, 1 - 15, <https://doi.org/10.25716/thm-222>.
- [23] Frank Müller (2023), Konstruktion klassischer Lösungen für einen Gegenstrom-Wärmetauscher zum Benchmarking numerischer Verfahren, THM Hochschulschriften 24, TH Mittelhessen, Gießen, 1 - 20, <https://doi.org/10.25716/thm-226>.

The image shows a modern building with a facade of large glass windows and a textured, light-colored material. The windows reflect the sky and surrounding greenery. The building has a clean, architectural design with dark frames around the windows.

Technische Hochschule Mittelhessen
Wiesenstr. 14
35390 Gießen

www.thm.de